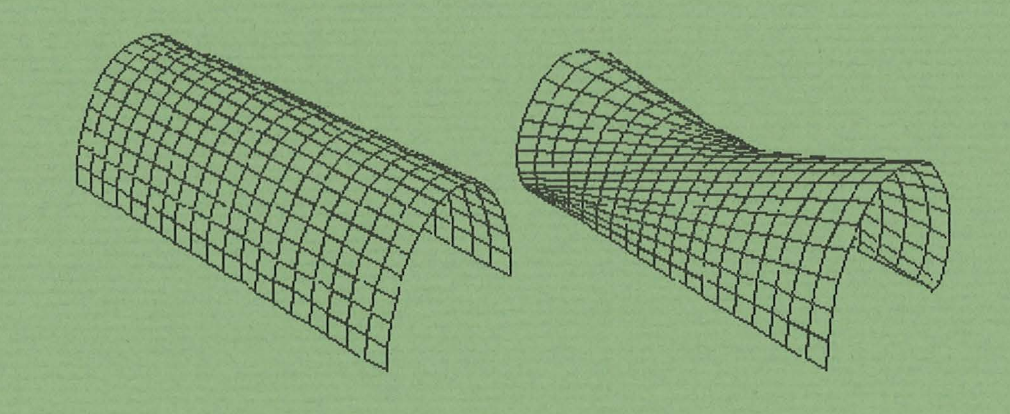
GENERACIÓN DE SUPERFICIES REGLADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

por

RAMÓN J. ZOIDO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE *MADRID*

3-53-01

GENERACIÓN DE SUPERFICIES REGLADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

por

RAMÓN J. ZOIDO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-53-01

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

3 Área
53 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

Para la lectura de algunos apartados del epígrafe **§ 1** de este texto – cuando se hace referencia, por ejemplo, a la línea de estricción o al cálculo de líneas asintóticas –, y para la lectura completa del **§ 2**, es conveniente tener nociones de la geometría diferencial de las superficies y, particularmente, el concepto de las dos primeras formas cuadráticas fundamentales y el uso y cálculo de sus coeficientes. El lector interesado en los métodos prácticos de obtención de representaciones paramétricas de superficies regladas, que es el objeto primordial del texto, puede saltarse todas estas cuestiones y acudir directamente al **§ 3** y **§ 4**, en el que se describen, de forma sencilla, estos métodos según las condiciones impuestas a las generatrices, sin realizar posteriormente ningún análisis formal sobre las propias superficies parametrizadas.

Generación de superficies regladas en forma paramétrica.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 135.01 / 3-53-01
ISBN: 84-9728-039-3
Depósito Legal: M-21285-2002

Agradezco la atenta lectura, con las aportaciones y sugerencias que sobre el contenido conceptual del texto – fundamentalmente de los epígrafes **§ 1** y **§ 2** –, ha realizado el profesor **José Rojo**. Algunas de sus precisiones han sido incluídas en una primera corrección y otras no se han tenido en cuenta porque, en mi opinión, se alejan de la intención de este trabajo.

Así mismo, agradezco la lectura y la revisión general del contenido del trabajo al profesor **Miguel de Unamuno**. Además de algunas de sus aportaciones puntuales – como la resolución de la ecuación trascendente del ejercicio E37 –, sus observaciones y precisiones me resultan particularmente muy apreciables.

A pesar de todo, es inevitable la aparición de errores e imprecisiones que se corregirán debidamente en sucesivas supervisiones.

ÍNDICE

§ 1.-Algunas cuestiones referentes a la parametrización de las superficies regladas

Una **superficie reglada elemental** es, básicamente, una superficie tal que por cada punto de la misma pasa una recta que está contenida toda ella en la superficie. Se manifiesta como un conjunto simplemente infinito, ordenado, de rectas en $\Re^3$. Todas y cada una de estas rectas constituyen lo que denominamos las **generatrices** de la superficie reglada.

Podemos contemplar, así mismo, este conjunto de rectas como un lugar geométrico en formación, esto es: como el movimiento de una sola recta que toma diferentes posiciones en el espacio al variar, de forma regular, un solo parámetro.

Una superficie reglada **parametrizada** elemental resultará ser, finalmente, el conjunto de puntos que la constituyen mas el conjunto de las diferentes familias de funciones que nos permiten describirlas analíticamente. Partiendo de cualquiera de sus representaciones equivalentes, la descrición analítica de una tal superficie deberá ser, congruentemente, la de un conjunto de rectas dependientes de un solo parámetro. Eligiendo la forma "continua" para tal representación, la superficie reglada podrá describirse en función del parámetro $\mathbf{u} \in \mathbf{I} \subset \Re$, por

$$\frac{\mathbf{x - x\ (u)}}{\alpha\ \mathbf{(u)}} = \frac{\mathbf{y - y\ (u)}}{\beta\ \mathbf{(u)}} = \frac{\mathbf{z - z\ (u)}}{\gamma\ \mathbf{(u)}} \qquad (1)$$

en la que debe excluirse el caso en que la dirección $\{ \alpha\ \mathbf{(u)}, \beta\ \mathbf{(u)}, \gamma\ \mathbf{(u)} \}$ tenga sus tres componentes nulas para cualquier valor del parámetro "**u**" ya que en tal caso la recta no está determinada.

Encontramos en esta ecuación dos funciones vectoriales de la variable real "**u**", sobre las que deberán ser impuestas las condiciones suficientes de regularidad general que deseemos. Una de ellas es la función que determina los puntos de este conjunto simplemente infinito de rectas:

$$\underline{\mathbf{D}} = \{ \mathbf{x(u), y(u), z(u)} \},$$

cuya imagen $\mathbf{(x(u), y(u), z(u))}$ representará una línea en $\Re^3$,

y la otra es la que determina sus direcciones:

$$\underline{\mathbf{d}}\ \mathbf{(u)} = \{ \alpha\mathbf{(u)}, \beta\mathbf{(u)}, \gamma\mathbf{(u)} \} \quad , \quad \underline{\mathbf{d}} \neq \mathbf{0}$$

La ecuación $_{(1)}$ puede ser escrita:

$$\frac{\mathbf{x - x\ (u)}}{\alpha\ \mathbf{(u)}} = \frac{\mathbf{y - y\ (u)}}{\beta\ \mathbf{(u)}} = \frac{\mathbf{z - z\ (u)}}{\gamma\ \mathbf{(u)}} = \mathbf{v}$$

y de aquí su forma paramétrica:

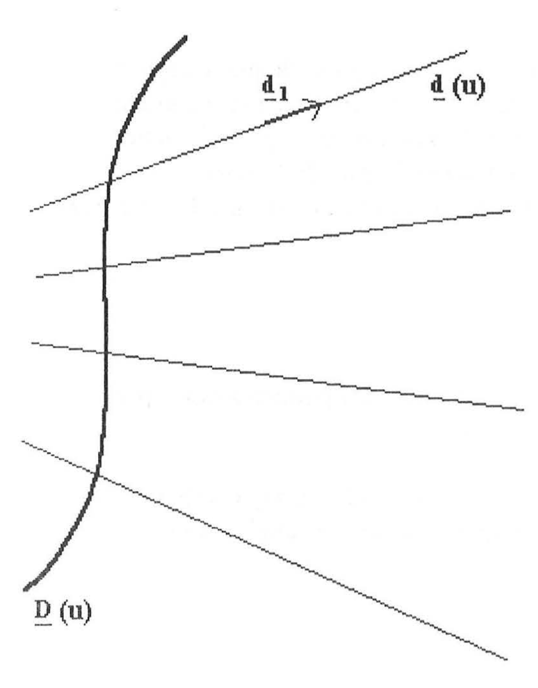
$$\mathbf{x = x\ (u) + v}\ \alpha\ \mathbf{(u)}$$
$$\mathbf{y = y\ (u) + v}\ \beta\ \mathbf{(u)}$$
$$\mathbf{z = z\ (u) + v}\ \gamma\ \mathbf{(u)}$$

que constituyen las **ecuaciones cartesianas** de la superficie reglada parametrizada.

Así que la representación paramétrica de la superficie reglada vendrá definida por la función vectorial:

$$\underline{r}(u,v) = \{ x(u) + v\,\alpha(u), y(u) + v\,\beta(u), z(u) + v\,\gamma(u) \} = \underline{D}(u) + v\,\underline{d}(u) \qquad (2)$$

que, como ecuación vectorial de una recta variable en $\Re^3$, resulta ser una expresión lineal con respecto al parámetro "v". Esta representación es privativa de las superficies regladas ya que toda superficie parametrizada $\underline{r}(u,v)$, lineal en uno de sus dos parámetros, es, trivialmente, la ecuación de una recta tal como la $_{(1)}$. A la representación lineal en uno de los parámetros – en nuestro caso el "v"– se la ha denominado en algunas ocasiones "forma reglada de la superficie".



La representación $_{(2)}$ nos permite contemplar ahora la superficie reglada como un lugar geométrico generado por rectas (generatrices) de dirección variable $\underline{d}$ con respecto a un parámetro "**u**" que "**se apoyan**", "**pasan**"o "**cortan**" a una curva directriz $\underline{D}$ escrita en función del mismo parámetro "**u**". La ecuación vectorial $_{(2)}$ manifiesta analíticamente una versión "constructiva" de estas superficies. Su generación consiste en la elección adecuada de una línea directriz y en la determinación de la dirección de las generatrices, ambas referidas a un mismo parámetro, ligadas posteriormente en una ecuación vectorial por el parámetro lineal "**v**". Conviene no olvidar que las dos funciones vectoriales $\underline{D}$ y $\underline{d}$, funciones del mismo parámetro, son cualitativamente diferentes ya que $\underline{D}(u)$ representa una línea en $\Re^3$, en tanto $\underline{d}(u)$ es la dirección de un vector, de manera que cualquier otro vector equivalente al $\underline{d}$ nos determinará la misma superficie siempre que resulte no nulo para cualquier valor del parámetro "**u**". Esta diferencia cualitativa la representaremos con la notación " ( ) "para las componentes de $\underline{D}$ (imagen, grafo o soporte) en tanto conservaremos la notación " { } " (vector) para la dirección $\underline{d}$, sin que esto suponga restricción a la hora de efectuar las operaciones usuales de suma o resta con las funciones vectoriales que las determinan analíticamente.

Por lo dicho, al margen de los límites que distinguen los parámetros, las parametrizaciones:

$$(v+u, v-u, 4uv) = (u, -u, 0) + v \{ 1, 1, 4u \} \qquad (3.a)$$

y

$$(v e^u + u, v e^u - u, 4u e^u v) = (u, -u, 0) + v \{ e^u, e^u, 4u e^u \} \qquad (3.b)$$

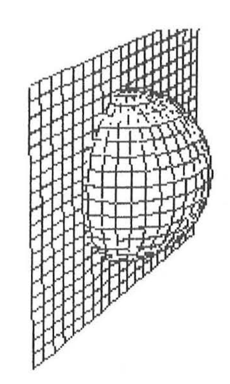
representan el mismo conjunto de puntos de $\Re^3$ cuya forma explícita – de Monge– corresponde al paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

La representación $\underline{D} + v\,\underline{d}_1$ siendo $\underline{d}_1$ la dirección unitaria de las generatrices

$$\underline{d}_1 = \frac{\underline{d}}{|\underline{d}|}$$

es irrelevante a efectos puramente prácticos y en la mayoría de los casos introduce cálculos más laboriosos. Sin embargo, desde otro punto de vista, permite algunas ventajas. Utilizando esta representación, el paraboloide hiperbólico puede escribirse:

$$\left(u + \frac{v}{\sqrt{2+16u^2}}, -u + \frac{v}{\sqrt{2+16u^2}}, \frac{4uv}{\sqrt{2+16u^2}} \right) = (u, -u, 0) + v \left\{ \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}, \frac{4u}{\sqrt{2+16u^2}} \right\} \qquad (3.c)$$



El lugar geométrico de los extremos de los vectores unitarios $\underline{d}_1$ de una superficie reglada es una indicatriz de la variación de la dirección de las generatrices, curva que recibe el nombre de **imagen o traza esférica** y es la intersección de una esfera de radio unidad con el **cono director** de la superficie que puede ser, obviamente, definido con cualquiera de las direcciones equivalentes de las generatrices. En la superficie $_{(3.a)}$, el cono director puede ser representado simplemente por $\mathbf{v\ \{1, 1, 4u\} = \{v, v, 4\,u\,v\}}$ que se reduce, en este caso, al plano $\mathbf{x = y}$, por lo que la indicatriz esférica de esta superficie es una circunferencia de radio unidad.

Fijar adecuadamente una función $\mathbf{v = v\,(u)}$ en la ecuación de cualquier superficie reglada parametrizada nos permite definir otra curva sobre la superficie que, en general, corta a todas las generatrices y que puede ser tomada como nueva directriz de la misma. Si en $_{(3.a)}$ definimos, por ejemplo, $\mathbf{v = u}$:

$$\mathbf{(u, -u, 0) + u\,\{1, 1, 4u\}}$$

nos determina la curva $\mathbf{(2\,u, 0, 4\,u^2)}$ que puede ser utilizada para otra representación equivalente de la misma superficie:

$$\mathbf{(2\,u, 0, 4\,u^2) + v\,\{1, 1, 4\,u\} = (2u + v, v, 4\,u^2 + 4\,u\,v)} \qquad (3.d)$$

De todo ello se deduce que, en lo referente a la descripción paramétrica de una superficie reglada $\underline{\mathbf{D}}\,\mathbf{(u) + v}\ \underline{\mathbf{d}}\,\mathbf{(u)}$, existen múltiples representaciones pudiendo, por un lado, utilizar diferentes directrices $\underline{\mathbf{D}}$ y, por otro, utilizar adecuadamente cualesquiera de las direcciones equivalentes $\underline{\mathbf{d}}$ de sus generatrices rectas.

Cualquier superficie que pueda ser parametrizada en la forma lineal – o "forma reglada"– en "v":

$$\underline{r}\,(u, v) = \underline{\mathbf{D}}\,(\mathbf{u}) + v\ \underline{\mathbf{d}}\,(\mathbf{u})$$

representa, como se ha dicho, la ecuación de una familia de rectas en $\Re^3$, y, por lo tanto, resulta ser una superficie reglada; pero esta representación no es única y la superficie, que es una clase de equivalencia, puede ser descrita de manera que no resulte lineal en ninguno de sus parámetros. Así, el propio paraboloide hiperbólico $\mathbf{z = x^2 - y^2}$ parametrizado en $_{(3.a)}$ $_{(3.b)}$ $_{(3.c)}$ $_{(3.d)}$ puede ser, además, trivialmente, representado por

$$\mathbf{(t, w, t^2\text{-}w^2)} \qquad (4)$$

que no es lineal en ninguno de sus dos parámetros **t, w** y, por lo tanto, en este caso, **su parametrización no manifiesta el carácter reglado** de la superficie. El cambio admisible de parámetros:

$$\varphi \quad \begin{cases} \mathbf{v + u = t} \\ \mathbf{v - u = w} \end{cases} \qquad \varphi^{-1} \quad \begin{cases} \mathbf{u = \dfrac{t - w}{2}} \\ \mathbf{v = \dfrac{t + w}{2}} \end{cases}$$

transforma, en efecto, la parametrización $\mathbf{(v{+}u, v - u, 4\,u\,v)}$ en la $\mathbf{(t, w, t^2 - w^2)}$. Esta particular superficie, muy estudiada, es, desde luego, reconocible en muchas de sus parametrizaciones; sin embargo, el problema de saber si una superficie tal como la $_{(4)}$ no lineal en ninguno de sus parámetros, es una superficie reglada no es, en general, un problema resoluble de forma inmediata salvo en contados casos. Un procedimiento ortodoxo para saber si, en estas condiciones, una superficie es reglada sería el de obtener las líneas asintóticas de la misma, una vez que hayamos comprobado que no existen puntos elípticos en la superficie. Después será necesario comprobar analíticamente que alguna de sus familias de líneas asintóticas son, en efecto, rectas, lo que puede no ser evidente por simple inspección ya que, así mismo, estas rectas pueden no presentarse descritas en sus parametrizaciones lineales, así que en este caso tendríamos que comprobar que la primera curvatura de tales líneas es nula para cualquier valor de su parámetro.

Otros procedimientos mas expeditivos implicarían comprobar que las ecuaciones paramétricas de una recta son compatibles con la ecuación de la superficie, lo que no resulta nada sencillo en todos los casos desde el punto de vista del cálculo, aunque sí lo sea en los ejemplos que usualmente se utilizan como ilustración de este procedimiento. Una vez obtenidas las líneas asintóticas y comprobado que al menos una de las posibles familias está compuesta de rectas se dispone ya de las generatrices y por lo tanto de la propia superficie reglada, o bien, se dispone de la dirección de estas rectas (generatrices) y basta elegir una directriz que las corte a todas para representar una de sus parametrizaciones lineales.

Las direcciones asintóticas del paraboloide escrito en la parametrización "no lineal"$_{(4)}$ pueden ser obtenidas, – en el plano tangente de cada punto – bajo la forma **{ 1, α (u,v) }**, con la expresión:

$$\mathbf{g\,(u,v)\;\;(\alpha\,(u,v))^{2} + 2\,f\,(u,v)\;\;\alpha\,(u,v) + e\,(u,v) = 0} \qquad (5)$$

que nos determina **α (u,v)**, y donde **e**, **f**, **g** , son los coeficientes de su segunda forma cuadrática fundamental. En este caso, la ecuación $_{(5)}$ se convierte en la:

$$\mathbf{-2\,\alpha^{2} + 2 = 0}$$

de donde podemos obtener **α = α (u, v) = ± 1**, y de aquí, la integración de:

$$\frac{dv}{du} = 1 \qquad\qquad v = u + c$$

$$\frac{dv}{du} = -1 \qquad\qquad v = -\,u + c$$

que determinan, respectivamente, sobre la superficie, las líneas:

$$(\,u,\,u + c,\,u^{2} - (u + c)^{2}\,) = (\,u,\,u + c,\,-2\,c\,u - c^{2}\,)$$

$$(\,u,\,-u + c,\,u^{2} - (-u + c)^{2}\,) = (\,u,\,-u + c,\,2\,c\,u + c^{2}\,)$$

y que, trivialmente, son dos familias de rectas. Comprobamos así que el paraboloide hiperbólico es una superficie **doblemente reglada**; es decir: contiene dos familias distintas de rectas generatrices cuyas direcciones son respectivamente:

$$\{\,1,\,1,\,-2\,c\,\} \qquad\qquad y \qquad\qquad \{\,1,\,-1,\,2\,c\,\}$$

Para representar la superficie podemos tomar ahora cualquier curva de la misma como directriz – siempre que corte a todas las generatrices– y como dirección de las generatrices cualquiera de las dos anteriores. Podemos, incluso, elegir como directriz cualquier recta de una de las familias, en tanto sea la segunda familia la que aporte a la parametrización la correspondiente dirección de las generatrices. Si en la superficie elegimos, por ejemplo, la curva **(u, u, 0)** y tomamos como dirección de las generatrices la **{ 1, –1, 2 c }**, bastará escribir ambas respecto al mismo parámetro "**u**" ó "**c**". En este caso, la relación entre "**u**" y "**c**" debe ser tomada de **v = – u + c** con **v = u** de donde **c = 2 u** y la superficie podrá ser representada paramétricamente por

$$(\,u,\,u,\,0\,) + v\,\{\,1,\,-1,\,4\,u\,\} = (\,u+v,\,u - v,\,4\,u\;v\,)$$

que es la parametrización $_{(2.a)}$.

Observese que, tal y como advertíamos antes, los cálculos pueden no ofrecer siempre las familias de rectas en la forma lineal acostumbrada. Si empleamos, por ejemplo, el mismo procedimiento anterior para encontrar las líneas asintóticas del hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ escrito en la parametrización lineal:

$$(\,v\cos u - \operatorname{sen} u,\,v\operatorname{sen} u + \cos u,\,v\,) = (\,-\operatorname{sen} u,\,\cos u,\,0\,) + v\,\{\,\cos u,\,\operatorname{sen} u,\,1\,\}$$

que es también una superficie doblemente reglada, la ecuación $_{(5)}$ resultará en este caso:

$$2\,\alpha - (1+v^2) = 0$$

por lo que una de las familias de curvas asintóticas estarán constituídas por las generatrices rectas de la representación (**g(u,v) = 0**), en tanto la otra se obtendrá de la integración de la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{du} = \frac{1+v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{1+v^2} = \frac{du}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{arc tg } v = \frac{1}{2}u + c \quad \Rightarrow \quad v = \text{tg}\,(\frac{1}{2}u + c)$$

asi que la segunda familia de líneas asintóticas viene expresada en la forma:

$$(\ \text{tg}\,(\frac{1}{2}u + c)\cos u - \text{sen}\,u,\ \text{tg}\,(\frac{1}{2}u + c)\,\text{sen}\,u + \cos u,\ \text{tg}\,(\frac{1}{2}u + c)\ )$$

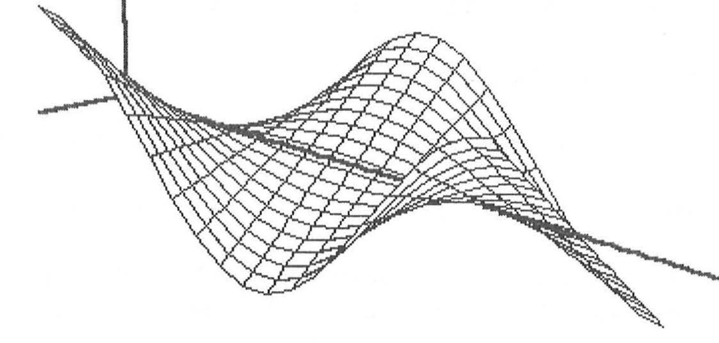
que es también, desde luego, una familia de rectas pero que no son inmediatamente reconocibles como tales sin un análisis complementario.

La búsqueda brutal de rectas por substitución directa de su forma paramétrica puede presentar, sin embargo, numerosas dificultades a la hora del cálculo y también el más expeditivo método de buscar coeficientes indeterminados, **m, n, p, q,** de rectas escritas en la forma

$$x = m\,z + n$$
$$y = p\,z + q$$

sobre superficies definidas por sus forma implícita o explícita, tales como el propio paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ o el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

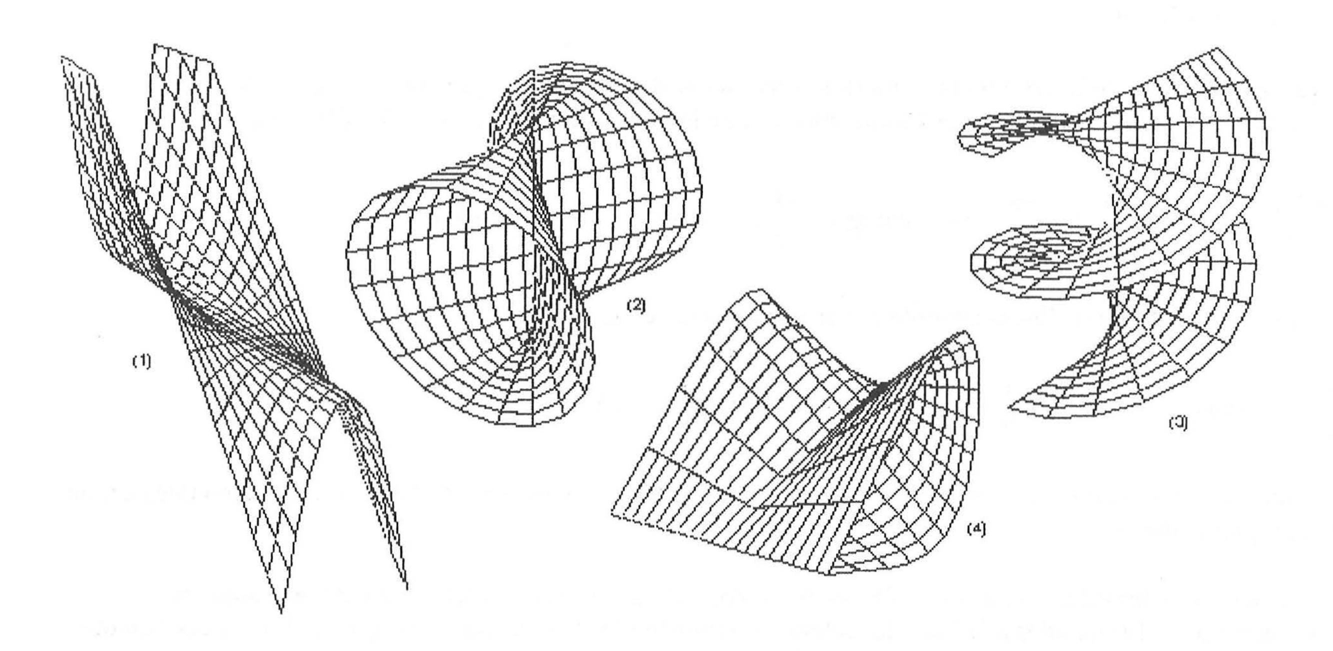
Por otra parte,las superficies simplemente regladas pueden contener eventualmente otras rectas que no pertenezcan a la familia de generatrices y que pueden ser tomadas como directriz de la representación. Así ocurre, por ejemplo,en el caso de la superficie regular $z = x \cos y$ que contiene una recta – el eje **OY** – que no es una generatriz de la superficie. Tal recta es, obviamente, una línea asintótica de la superficie que, además, resulta ser perpendicular a todas las generatrices y se convierte en la línea de estricción de la misma. Su parametrización trivial:



$$(\ v,\ u,\ v\cos u\ ) = (\ 0,\ u,\ 0\ ) + v\ \{\ 1,\ 0,\ \cos u\ \}$$

la utiliza como directriz de la representación.

Lo mismo le ocurre a superficies tan diversas como la $z = x^2\,(1-y)$ (1), generada en E34 y E39 del **§ 4**, la $x^2 - y^2 + y^2\,z^2 = 0$ (2), el propio helicoide recto $z = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$ (3),o la superficie $x = (\text{arc sen}\,\frac{z}{y})^2$ (4) – estas dos últimas completadas por periodicidad –, entre otras muchas.



La superficie [(1)] contiene la recta $\mathbf{y = 1}$ que es su línea de estricción. La parametrización

$$(\mathbf{u}, -2\,\mathbf{v}, (1+2\,\mathbf{v})\,\mathbf{u}^2) = (\mathbf{u}, 0, \mathbf{u}^2) + \mathbf{v}\,\{0, -2, 2\,\mathbf{u}^2\}$$

no la utiliza como directriz de la representación, pero su línea coordenada $\mathbf{v} = -\dfrac{1}{2}$ permite obtener tal recta, y la parametrización equivalente

$$(\mathbf{u}, 1, 0) + \mathbf{v}\,\{0, -2, 2\,\mathbf{u}^2\} = (\mathbf{u}, 1-2\,\mathbf{v}, 2\,\mathbf{u}^2\,\mathbf{v})$$

la utiliza como directriz.

En el segundo y tercer ejemplos [(2)] y [(3)], las parametrizaciones

$$(\mathbf{v}\cos\mathbf{u}, \mathbf{v}, \operatorname{sen}\mathbf{u}) = (0, 0, \operatorname{sen}\mathbf{u}) + \mathbf{v}\,\{\cos\mathbf{u}, 1, 0\} \quad \text{y} \quad (\mathbf{v}\cos\mathbf{u}, \mathbf{v}\operatorname{sen}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (0, 0, \mathbf{u}) + \mathbf{v}\,\{\cos\mathbf{u}, \operatorname{sen}\mathbf{u}, 0\}$$

utilizan el eje **OZ** – recta no perteneciente a la familia de generatrices y línea de estricción en ambas superficies – como directriz. Y lo mismo ocurre en el ejemplo [(4)], donde el eje **OX**, su línea de estricción, es una recta de la superficie que no es generatriz de la misma. La parametrización

$$(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}, \mathbf{v}\operatorname{sen}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}^2, 0, 0) + \mathbf{v}\,\{0, 1, \operatorname{sen}\mathbf{u}\}$$

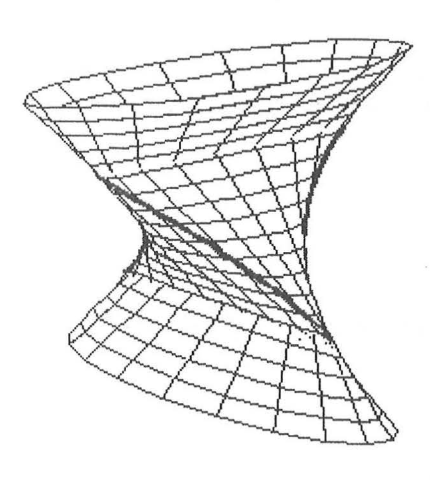
la utiliza como directriz.

Finalmente, añadiremos a los anteriores ejemplos el de la superficie

$$\frac{x^2}{(z+1)^2} + \frac{y^2}{(z-1)^2} = 1$$

que admite, por ejemplo, la parametrización

$$((1-\mathbf{v})\cos\mathbf{u}, (1+\mathbf{v})\operatorname{sen}\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = (\cos\mathbf{u}, \operatorname{sen}\mathbf{u}, 0) + \mathbf{v}\,\{-\cos\mathbf{u}, \operatorname{sen}\mathbf{u}, -1\}$$



Esta superficie contiene las rectas

$\mathbf{x = 0\ ,\ z = -1\ (\ v = 1\ )}$ e $\mathbf{y = 0\ ,\ z = 1\ (\ v = -1\ )}$

que no son generatrices. Su línea de estricción – representada sobre la superficie en la figura – es la curva $\mathbf{(\ 2\cos^3 u, 2\,sen^3 u, \cos^2 u - sen^2 u\ )}$. Cualquiera de las dos rectas anteriores puede ser tomada como directriz de la representación paramétrica en las parametrizaciones:

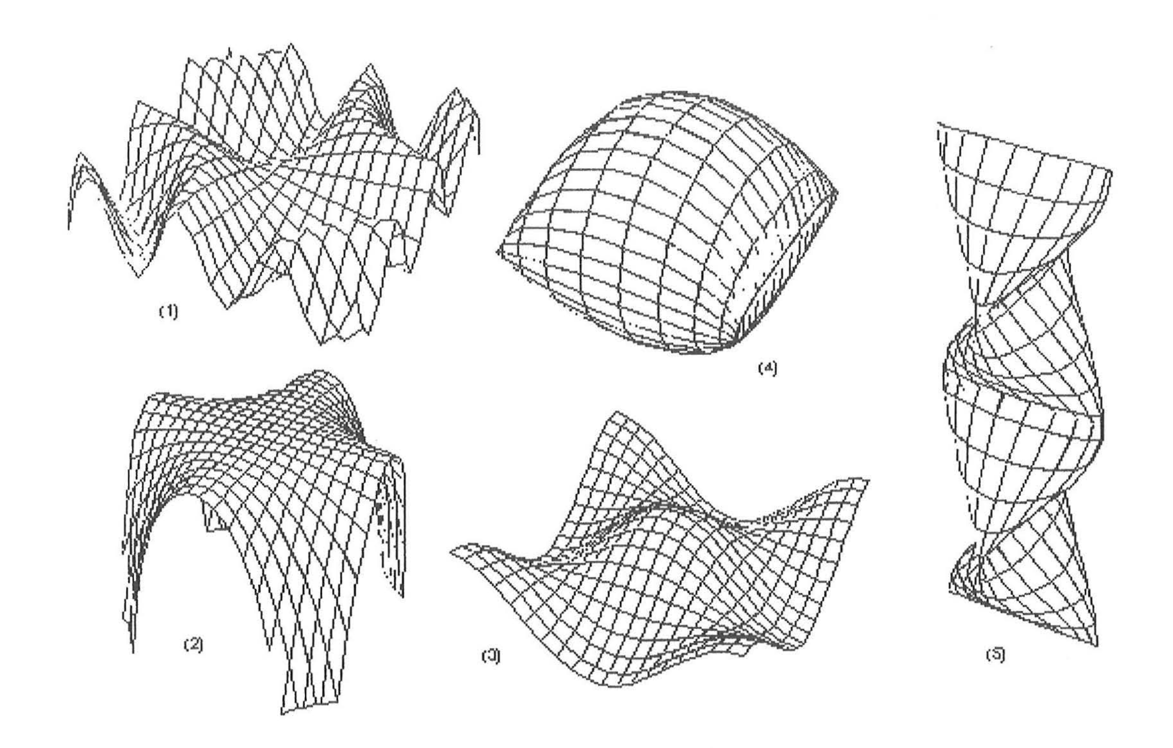
$\mathbf{(\ 0, 2\,sen\,u, -1\ ) + v\ \{ -\cos u, sen\,u, -1\ \}}$

$\mathbf{(\ 2\cos u, 0, 1\ ) + v\ \{ -\cos u, sen\,u, -1\ \}}$

en tanto su parametrización canónica será:

$$\mathbf{(\ 2\cos^3 u, 2\,sen^3 u, \cos^2 u - sen^2 u\ ) + v\ \{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u, \frac{1}{\sqrt{2}}\,sen\,u, -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \}}$$

Cabe añadir, aunque resulte bastante trivial, que cualquier superficie puede, eventualmente, contener rectas, sin que la superficie sea necesariamente reglada. En algunas ocasiones estas rectas son autointersecciones o líneas de puntos singulares de la superficie, pero en otros casos las rectas se encuentran sobre superficies elementales – cubiertas por una sola parametrización – y completamente regulares. No resulta dificil encontrar ejemplos utilizando funciones sencillas, tales como polinomios o funciones circulares o hiperbólicas que nos permiten representar una extraordinaria variedad de superficies, regladas o no, con diferentes peculiaridades . Entre las superficies no regladas que contienen rectas, valgan los siguientes ejemplos ilustrativos:



En la superficie regular $\mathbf{z = sen\,x\,y}$ [(1)], las curvas de nivel son la familia de hipérbolas $\mathbf{x\,y = C}$ que degeneran en dos rectas en el origen de coordenadas; la superficie, pues, contiene los ejes **OX** y **OY** . Algo parecido ocurre con la superficie $\mathbf{z + ch\,x\,y = 0}$ [(2)], que contiene a las rectas $\mathbf{x = 0\ ,\ z = -1}$ y $\mathbf{y = 0\ ,\ z = -1}$.

Las superficie $\mathbf{z - \cos x \ \cos y = 0}$ [3] cuya parametrización trivial es la **(u, v, cos u cos v)** o la superficie $\mathbf{x^2+ y^2+ z^2 - x^2 y^2 -1 = 0}$ [4], una de cuyas parametrizaciones es la **(cos u, sen v, sen u cos v)** son superficies, bien diferentes que tienen cuatro rectas en la región **u** $\in [-\pi, \pi]$, **v** $\in [-\pi, \pi]$.

Por último, la superficie

$$\text{arc sen} \frac{z}{\text{sen } x} + \text{arc cos } \frac{y}{\cos x} = 0 \ ^{(5)},$$

una de cuyas parametrizaciones es la **(v, cos u cos v, – sen u sen v)**, tiene cinco rectas en la región **u** $\in [-\pi, \pi]$, **v** $\in [-\pi, \pi]$.

§2.-Algunas cuestiones acerca de la clasificación y de la forma de las superficies regladas

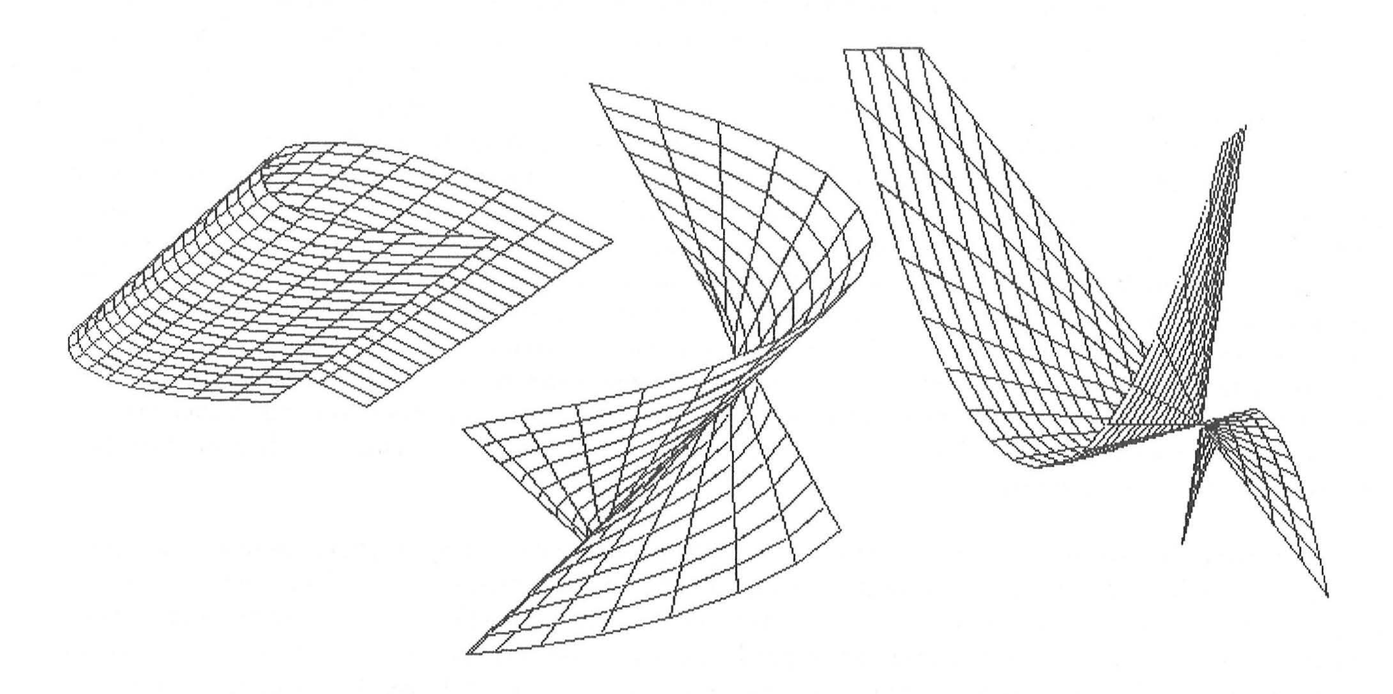
Como sabemos, en las superficies regladas los puntos pueden ser solamente de tipo parabólico o hiperbólico, pudiendo ser todos de un solo tipo o, bajo distintas condiciones, compartir ambos tipos.

En ingeniería y arquitectura se han venido denominando superficies "**de doble curvatura**" a aquellas cuyos puntos son todos elípticos ("**sinclásticas**") o todos hiperbólicos ("**anticlásticas**"), y superficies de "**curvatura simple**"a las **desarrollables**, cuyos puntos son todos parabólicos o planos.

En geometría diferencial la distinción se hace, generalmente, a través del valor que puede tomar en una región de la superficie el producto de las dos curvaturas principales, denominado **curvatura total** o de Gauss, K_T, y asi puede hablarse de superficies de curvatura – de Gauss – **positiva** ("sinclásticas"), **negativa** ("anticlásticas") o **nula** ("de curvatura simple" o desarrollables).

Excluídos los punto elípticos de las superficies regladas, estas pueden ser reclasificadas, trivialmente, en dos tipos:

-Las superficicies de **curvatura nula** (en todos sus puntos regulares) que son las **desarrollables.** Aquí se encuentran los **cilindros**, los **conos** o las superficies formadas por las tangentes de una curva contenida en ellas y que es su llamada **arista de retroceso**. A éstas últimas se las denomina superficies de **desarrollo tangencial** o **tangenciales** (de una curva). Por otra parte las superficies desarrollables mismas pueden ser vistas como envolventes de familias monoparamétricas de planos que tienen una dirección común – cilindros – , o bien un punto común – conos– , o bien son las envolventes de la familia de planos osculadores de su arista de retroceso.



-Las superficies regladas cuya curvatura de Gauss – negativa – es diferente de cero en algún punto, o sea las superficies **no desarrollables**, son denominadas también **alabeadas**. En ellas, los puntos son en general hiperbólicos y, excepcionalmente, parabólicos. Los puntos parabólicos de una superficie reglada alabeada se agrupan a lo largo de algunas generatrices de la superficie donde éstas tienen un comportamiento local parecido al de las generatrices de las desarrollables. Superficies regladas alabeadas son los conoides, siempre que no degeneren en un plano – entre ellas se encuentra el helicoide recto, único conoide que es, al mismo tiempo, una superficie mínima – y también las dos superficies más consideradas en el campo de las estructuras laminares y, en general, en el diseño arquitectónico, como son el paraboloide hiperbólico y el hiperboloide de una hoja, que son las cuádricas doblemente regladas.

Esta clasificación trasciende el análisis formal académico de las superficies. Por ejemplo, en lo referente al comportamiento elástico-resistente de las estructuras laminares materializadas como superficies regladas de pequeño espesor, resulta también determinante la distinción entre alabeadas y desarrollables.

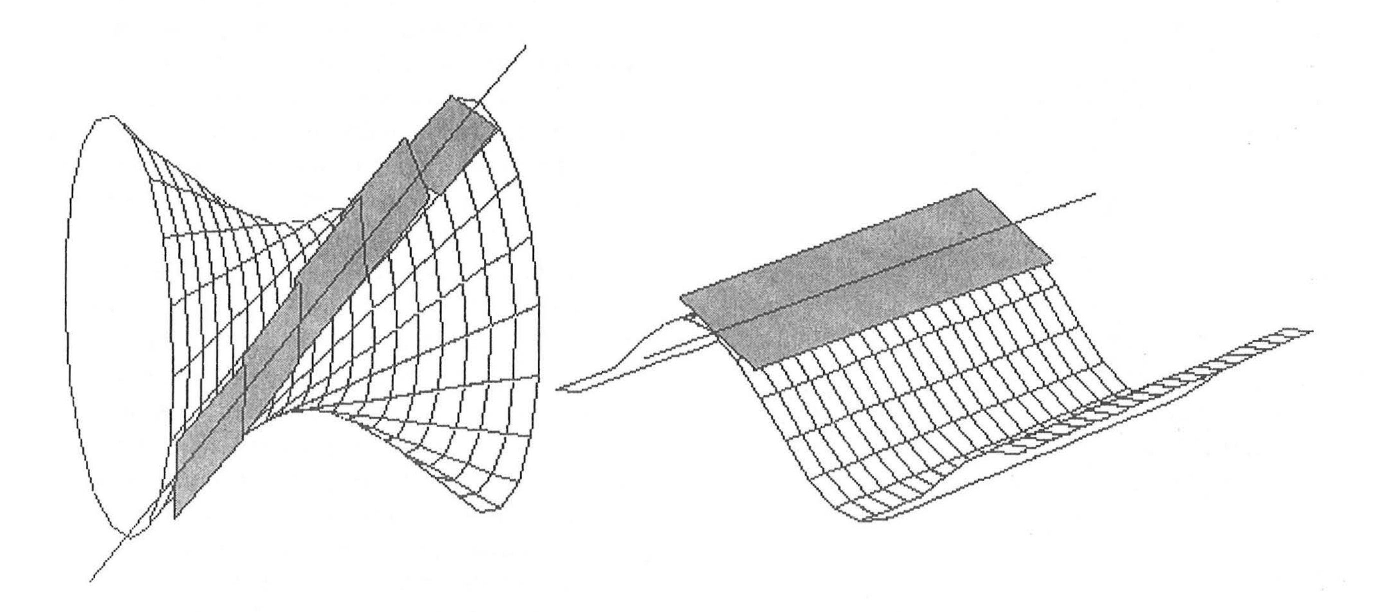
Como se sabe, bajo el nombre genérico de estructuras laminares se agrupa un conjunto de formas constructivas de espesor muy pequeño en comparación con sus otras dimensiones, que son asimilables a superficies o bien a agrupaciones o acoplamientos de superficies – incluidos los planos –, que tienen formas diversas y comportamientos resistentes muy diferentes. Una distinción imprescindible en las láminas es entre aquéllas en que, en su forma de trabajo resistente bajo condiciones normales de carga, predominan los esfuerzos de membrana (tracciones repartidas uniformemente), y aquéllas en las que predominan los esfuerzos de flexión (resistencia al cambio de forma). En las primeras la forma es determinante, ya que los esfuerzos principales se encuentran en el plano tangente de la superficie que las substituye idealmente. Para que existan solamente esfuerzos de membrana es necesario, aunque no es suficiente, que la lámina sea de doble curvatura. A estas estructuras las podemos denominar **cascarónes** – shell –, en tanto aquéllas otras en que predominan las flexiones podemos reservarles el nombre de **láminas**. En las primeras no pueden existir cambios de forma, en tanto en las segundas la flexión va acompañada de cambio de curvatura, y por lo tanto de cambio de forma. Las **placas**, que son superficies planas que soportan las solicitaciones unicamente por flexión, serían los casos límite de las láminas. Las superficies desarrollables, por ejemplo, no pueden asumir los esfuerzos de membrana en dirección de sus generatrices; así, en las bóvedas cilíndricas de cierta longitud – que responden en realidad como vigas – deberá confiarse la conservación de su forma a otras estructuras rigidizantes, como arcos – costillas –. En bóvedas cortas el régimen comparte esfuerzos de membrana y flexiones.

En los cascarones muy delgados, con doble curvatura, cualquier sistema de solicitación exterior debe ser convertido en esfuerzos de membrana. Localmente, su espesor excluye las flexiones y también las compresiones, ya que debido a su delgadez está expuesta al pandeo bajo esfuerzos de compresión muy pequeños. En la naturaleza, y seguramente bajo el principio de la economía, encontramos numerosos ejemplos de cáscaras – siempre de doble curvatura – con una sorprendente resistencia, en comparación con su espesor, a determinadas solicitaciones que no incluyen las de flexión. Es por esta razón por lo que el espesor puede ser mínimo y por lo tanto con la mínima cantidad de materia. Estos cascarones resultan ser el modelo más aproximado de una superficie matemática, lo que permite una mayor correspondencia con los cálculos. El que una lámina estructural trabaje con predominio total de esfuerzos en su plano tangente facilita su cálculo resistente, ya que los esfuerzos de membrana son estáticamente determinados de forma intrínseca; no obstante, esta forma de trabajo solamente puede ser válida para determinadas regiones del interior de la superficie, en determinadas condiciones de carga, y para determinadas dimensiones. Aun admitiendo que su forma de trabajo predominante sea "de membrana", en los bordes o límites finitos de la lámina las componentes remanentes deben ser neutralizadas de alguna manera. Las condiciones de contorno, que en la gran mayoría de los casos quedan indeterminadas, permiten diferentes combinaciones y alternativas, conviertiendose en uno de los aspectos más importantes de la estabilidad. Para que esos límites no existan, las superficies deberían ser compactas, tales como una esfera o un toro, que son formas "naturales" de doble curvatura, finitas pero ilimitadas interiormente.

Finalmente, en lo referente a la materialización en hormigón armado de las superficies laminares, resulta trivial la comparación entre las superficies regladas y las no regladas. Las superficies no regladas requieren moldes curvados realizados en taller con costosas cimbras, en tanto los moldes de intradós de las estructuras laminares de hormigón armado asimilables a superficies regladas pueden ser sustituidos discretamente por tablas rectangulares y el hormigón vertido sobre estos cofres de tablas – que hacen el papel de las generatrices de la superficie que la idealiza – ancladas, de diferentes maneras, en diferentes directrices. La variación en el alabeo de la superficie, o sea, en terminología matemática; su alejamiento del plano tangente, no debe ser muy grande para, con un número razonable de juntas, permitir el conformado de la superficie con tablas rectas, cuyo ancho pueda considerarse aceptable constructivamente. Cuando las directrices son además rectilíneas, la simplificación es aún mayor porque los largueros sustentantes de las tablas son también rectos. De aquí el uso ventajoso de los paraboloides hiperbólicos y del hiperboloide alabeado, que tienen dos sistemas de generatrices rectas y además son de doble curvatura y, por lo tanto, indeformables. De estas dos superficies el paraboloide presenta mucha menor complejidad a la hora del cálculo de su espesor y de las condiciones de contorno, por lo que también aquí su utilización se muestra preferible. El paraboloide hiperbólico puede ser, además, generado de diversas formas y como consecuencia, construido con replanteos diversos: puede ser generado como una superficicie de traslación, como una superficie helicoidal, como un conoide y como una superficie reglada con tres directrices rectas. En los conoides de plano director horizontal, las tablas se anclan en dos directrices manteniéndose horizontales, lo que facilita se ejecución.

A pequeña escala, la construcción de superficies regladas desarrollables parece un problema sencillo, pero considerando grandes dimensiones las dificultades son muchas: el propio replanteo, el ajuste de los elementos, la limitación de las dimensiones y resistencia de las tablas del encofrado, el posible alabeo o desajuste de las mismas, los recubrimientos, los fenómenos de retracción, etc.

Entre las superficies regladas, las alabeadas y desarrollables se pueden diferenciar entre sí al analizar, por ejemplo, el conjunto de planos tangentes a la superficie en los puntos de una generatriz arbitraria. Dichos planos tangentes, en ambos casos, contienen la propia generatriz, pero en las alabeadas lo general es que varíen a lo largo de sus puntos formando un haz de planos con una recta común que es la propia generatriz. Todos los planos de este haz son, trivialmente, perpendiculares a los planos normales a la generatriz. En las superficies desarrollables, sin embargo, el plano tangente a lo largo de los puntos de cada generatriz es único e invariable y las superficies mismas se convierten en envolventes de sus propios planos tangentes.



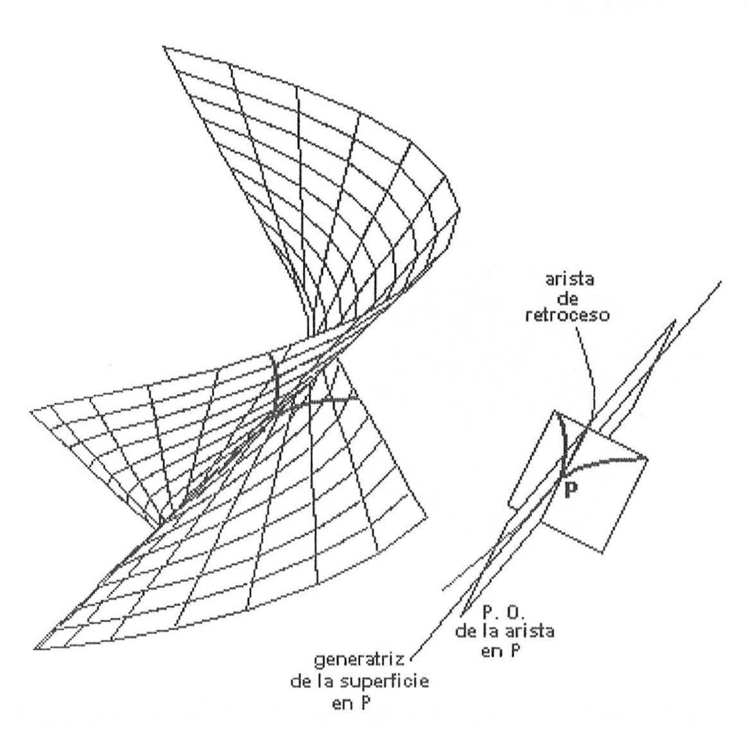
En una superficie reglada alabeada resulta muy interesante observar el conjunto de normales a la superficie a lo largo de los puntos de una cualquiera de sus generatrices. Todas estas normales lo son a la propia generatriz y por lo tanto paralelas a su plano normal, así que este conjunto de rectas determinan un conoide recto cuya directriz es la generatriz de la superficie: forman el llamado "paraboloide de normales" que corta ortogonalmente a la superficie alabeada a lo largo de la generatriz. En las superficies desarrollables esta superficie se convierte, trivialmente, en un plano. En general, la observación de los campos de normales a una superficie restringido a una línea cualquiera de la misma juega un importante papel en el análisis formal de las mismas. Cuando la superficie de normales a lo largo de una línea resulta ser una superficie desarrollable, por ejemplo, la línea resulta ser una línea de curvatura principal de la superficie.

Considerando dos rectas que se cruzan en $\Re^3$, se denomina **punto central** de cada una de ellas al de intersección con la perpendicular común. La longitud del segmento delimitado entre ambos puntos centrales es la denominada distancia euclídea entre las rectas, que es la distancia mínima entre dos puntos genéricos de una y de otra. Un punto central se puede definir también sobre cualquier recta respecto de un solo punto fuera de ella. Por otro lado, la distancia entre dos puntos de una superficie regular es el menor valor de las longitudes de los arcos de curvas que, sobre la superfcie, los contengan; naturalemente, esta distancia es mayor o igual que la distancia entre ambos puntos como puntos de $\Re^3$.

Si tomamos ahora dos generatrices cualesquiera, no coplanarias, de una superfcie reglada, se induce sobre cada una de ellas un punto central. En las superficies regladas ocurre que los puntos centrales de generatrices suficientemente próximas van determinando una curva que, por lo dicho anteriormente, toma el nombre de **línea "de estricción"** de la superficie. Es, por asi decirlo, la línea de la superficie sobre la que las generatrices están más próximas entre sí. La arista de retroceso de las regladas desarrollables es también una línea de estricción de la superficie, con la particularidad de que en éstas, además, los puntos son los singulares de la superficie, lo que resulta ser un caso límite porque aquí las generatrices son tangentes a la curva de sus puntos centrales.

En una superficie reglada alabeada, sin embargo, es excepcional el que un punto central – de su línea de estricción – sea, además, singular.

Los puntos centrales de cada generatriz, que determinan sobre la superficie su línea de estricción, pueden ser también definidos por propiedades proyectivas, y para ello es conveniente comenzar estableciendo que el haz de planos tangentes en los distintos puntos de cualquier generatriz de puntos hiperbólicos de una superficie alabeada es proyectivo con la serie de puntos de contacto (Chasles); de todo este haz de planos, el correspondiente al punto del infinito de la generatriz será el plano asintótico, y el plano del haz perpendicular al asintótico será el denominado plano central de la generatriz; su punto de contacto con la superficie determina el punto central de la generatriz, y el lugar geométrico de estos puntos centrales es la línea de estricción.



En las superficies regladas desarrollables que no son cilindros ni conos, la arista de retroceso es la curva de encuentro de las dos hojas de la superficie generada por sus tangentes, cada una de ellas determinada por las generatrices a cada uno de los lados de la arista. El corte de la superficie por un plano cualquiera que corte a la arista y que no sea su plano osculador determina dos arcos de una curva que tiene dos ramas – una a cada lado del plano osculador de la curva –; la traza entre ambos planos considerados – el osculador de la curva y el de corte– es una tangente común a ambas ramas, y el punto de la arista interceptado es por lo tanto un punto de retroceso de la sección; de aquí el nombre alternativo de “arista de retroceso” para la linea de estricción de estas superficies. Los dos haces de planos tangentes a la superfcie en los puntos de cada una de las ramas tienen un elemento común, que es el osculador de la arista de retroceso que las limita, así que el propio plano osculador de la curva es un plano de retroceso de los planos tangentes a la superficie en cada uno de los puntos de la sección considerada. Desde luego no resulta fácilmente visualizable, de forma intuitiva, esta situación, salvo si se construye adecuadamente un modelo en tres dimensiones de una superficie tangencial de cualquier arco de curva alabeada, en cuyo caso la disposición se hace muy obvia. En los conos la arista de retroceso se reduce, trivialmente, a un punto que es su vértice, y en los cilindros carece de sentido hablar de arista de retroceso ya que no existe. En parametrizaciones de conos y superficies tangenciales, en su forma lineal, en las que sea utilizada como directriz una curva que no sea ni el vértice ni la directriz del desarrollo, respectivamente, la obtención de la arista de retroceso nos permite, como alternativa a la investigación directa de sus puntos singulares, conocer si la desarrollable es realmente un cono o una desarrollable tangencial, y reparametrizar la desarrollable tomando como directriz la arista de retroceso, en cuyo caso la parametrización misma nos muestra qué superficie estamos considerando. Éste es el objeto, entre otras cosas, de la parametrización canónica de la superficie.

En las regladas alabeadas, si embargo, la línea de estricción, generalmente, no se suele mostrar visiblemente salvo, a lo sumo, en sus puntos singulares y lo normal es que pase desapercibida entre el tejido de curvas arbitrarias de la superficie. En algunas de éstas se manifiesta cuando es una recta, y en otras que además de ser regladas son superficies de revolución – tal como las generadas por rotación de una recta alrededor de otra no coplanaria ni contenida en un plano perpendicular a ella – coincide con su círculo de garganta; esto ocurre, por ejemplo, en el hiperboloide (alabeado) de una hoja.

Se sabe que la primera forma cuadrática determina completamente la geometría sobre la superficie y que, por lo tanto, rige los problemas de **medida** sobre la misma. Esto significa que si conocemos los valores de los coeficientes **E**, **F**, **G** y si se nos dan las curvas sobre la superficie, podremos determinar tanto las longitudes de estas curvas como los ángulos que intersectan, aun cuando no se conozca la propia ecuación de la superficie. Asi mismo estos coeficientes determinan el área de una región adecuadamente definida por curvas sobre la superficie.

Sin embargo, la superficie misma no está determinada por la primera forma cuadrática, ya que es posible construir familias de superficies que dependan de un parámetro adicional de forma que las cantidades **E, F, G** tengan los mismos valores para el parametro arbitrario. En este caso, a cualquier cambio continuo en el parámetro corresponderá una deformación continua de la superficie. En una deformación de este tipo, las longitudes de los arcos de las curvas trazadas, así como los ángulos entre estas curvas, permanecerán fijos, y también será invariable el área de las regiones correspondientes. Este tipo de deformación se denomina **flexión de la superficie** y juega un papel importante, por ejemplo, en la teoría de los cascarones delgados.

Algunas de estas deformaciones por flexión planteadas sobre superficies sencillas y bien conocidas son fácilmente visualizables, como lo es, por ejemplo, el caso de la transformación local de un cilindro circular (no del cilindro completo, desde luego) en su propio plano tangente a lo largo de una de sus generatrices, ya que en este proceso flexionante se transforman los arcos de circunferencias en rectas – se rectifican literalmente – mientras que las generatrices rectas permanecen invariantes. Es fácil ver que un cilindro circular cortado a lo largo de una generatriz no deja de ser una hoja plana curvada regularmente, y que las líneas y regiones dibujadas en la misma no pueden sufrir cambios métricos en este proceso. Sin embargo otras flexiones son menos aparentes, como ocurre con el notorio ejemplo de la transformación de un catenoide (superficie de revolución) en un helicoide recto (conoide) en el que los arcos de circunferencias se tranforman en hélices y los arcos de catenarias en rectas. Partiendo de la base de que cualquier arco de curva regular, de forma arbitraria, se puede transformar por deformación continua en cualquier otro arco regular conservando su longitud, lo peculiar y extraordinario del proceso de flexión es que sean las dos familias de curvas que forman el tejido de la superfcie las que se deformen **simultáneamente** conservando estas propiedades métricas.

Matemáticamente a esta transformación por flexión la denominamos **isometría**, aunque no todas las transformaciones isométricas son necesariamente el resultado de una flexión, ya que, por ejemplo, se verifica que todas las superficies con curvatura igual y constante son isométricas. La flexión de la superficie es mucho más restrictiva ya que implica la continuidad de todos los estados intermedios de la trasformación, en tanto la isometría solamente atiende a los estados inicial y final. Cuando los coeficientes de la primera forma cuadrática no son iguales pero se conservan proporcionales en la transformación, esta se denomina **conforme** y en ella se conservan solamente los ángulos entre las curvas.

La curvatura de Gauss $\mathbf{K_T}$ es un índice determinante para la clasificación de las superficies en general. Si se verifica la ecuación de Gauss, que se presenta generalmente en los textos junto a las de Codazzi formando las llamadas ecuaciones de compatibilidad de las superficies, y que, básicamente, lo que garantizan es la correspondencia uno a uno entre las familias de superficies y la primera y segunda formas cuadráticas fundamentales, la curvatura $\mathbf{K_T}$ queda completamente determinada por los coeficientes de la primera forma cuadrática fundamental (y de sus derivadas), y este importante hecho nos lleva a considerar que bajo la flexión, la curvatura de Gauss de la superficie también permanece invariable aunque varíen, lógicamente, las curvaturas principales. Una de las consecuencias mas simples, pero importante, es que de todas las superficies posibles, solamente las de curvatura de Gauss igual a cero – desarrollables – pueden transformarse por simple flexion en un plano, cuya $\mathbf{K_T}$ es trivialemente igual a cero. Recíprocamente, ninguna superficie que no sea desarrollable (sea reglada o no) puede transformarse por flexión en un plano sin estirarse ni romperse lo que también resulta importante para la forma de analizar las estructuras laminares. De ahí que tenga algo de sentido el denominar "alabeadas" a las superficies no desarrollables, aunque, lógicamente, todas las superficies desarrollables, que no sean trivialmente un plano, también "se alabean" en $\Re^3$.

Considerando que ni las superficies "sinclásticas" ni las "anticlásticas" pueden desplegarse en planos sin estirarse ni encogerse, en un cascarón rígido de "doble curvatura" el aplastamiento se verifica inevitablemente a través de la rotura. Es lo que usualmente se conoce por "indeformabilidad".

A las superficies con dos sistemas de generatrices rectas, el paraboloide hiperbólico y hiperboloide de una hoja que se han contemplado en **§ 1**, se las han distinguido con el nombre de doblemente regladas. Si solo existe una familia de generatrices rectas, la superficie reglada puede ser, indistintamente, desarrollable o alabeada, pero en estos dos casos en que existen dos familias distintas de generatrices rectas, las superfices resultan ser necesariamente alabeadas.

Como se sabe, la elección de una parametrización es, finalmente, un problema de diseño "discreto" de las superficicies, ya que se determinan las dos familias de lineas coordenadas que "reconstruyen" la superficie en $\Re^3$ por medio de una red entrelazada y continua de curvas de referencia. En la parametrización "lineal" de las regladas, una de las familias de líneas coordenadas está formada por rectas de la superficie, o sea; sus generatrices, que son trivialmente líneas **asintóticas** de la misma, por lo que uno de los dos coeficientes **e** ó **g** de la segunda forma cuadrática fundamental será siempre nulo. Cuando las generatrices son, además, **líneas de curvatura** de la superficie – líneas de curvatura principal o principales –, la superficie es desarrollable y en todos sus puntos el valor de $\mathbf{e\,g - f^2}$ es siempre nulo a causa de serlo tanto **f** como **e** ó **g**. En este caso, la superficie está referida por líneas coordenadas que forman una red conjugada (**f (u,v) = 0**): una de las familias de líneas principales la forman las generatrices y la otra sus trayectorias ortogonales.

En general, si una superficie está referida a las lineas de curvatura, entonces **f (u,v) =F (u,v) = 0**, puesto que las direcciones principales son en cada punto conjugadas y además perpendiculares entre sí. Se puede demostrar que todas las superficies pueden referirse de esta manera a sus líneas de curvatura, o sea; que pueden usarse como líneas coordenadas salvo el caso excepcional en que, en una región, las curvaturas sean constantes. Si las superficies son regladas, este último caso es el de los planos. Si las líneas coordenadas son líneas de curvatura entonces las ecuaciones de Codazzi-Gauss se simplifican notablemente, así como las componentes de las derivadas de un vector arbitrario en términos de las componentes del vector mismo. Es, por lo tanto, extraordinariamente útil el disponer de la parametrización de la superficie en la que las líneas coordenadas sean, al mismo tiempo, líneas de curvatura principal, pero en general esta parametrización no resulta nada fácil de obtener, y muchas veces la sencillez que aportaría a los cálculos estaría contrarrestada por la propia complejidad de la representación paramétrica.

Finalmente, una superficie que tenga curvatura de Gauss negativa en todos sus puntos puede, asimismo, parametrizarse de manera que sus líneas coordenadas sean las líneas asintóticas de la superficie, en cuyo caso se verifica que **e (u,v) =g (u,v) = 0**. Como en las superficies desarrollables, todas ellas de puntos parabólicos, no existe más que una familia de líneas asintóticas que son las generatrices, este último caso no puede darse, así que salvo en los puntos de un plano, en las desarrollables uno de los dos coeficientes **e** ó **g** debe ser no nulo.

§3.-Generación paramétrica de superficies regladas

Para describir de forma práctica los diferentes tipos de superficies regladas que pueden generarse paramétricamente en la forma $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \underline{\mathbf{d}}(\mathbf{u})$, es decir: determinando la directriz $\underline{\mathbf{D}}$ y la dirección de las generatrices $\underline{\mathbf{d}}$ en función del mismo parámetro "**u**" y ligando después ambas funciones vectoriales con el parámetro "**v**", es conveniente agruparlas y esto puede hacerse de diferentes maneras en función de los objetivos y el alcance que se pretenda dar a la descripción. La siguiente clasificación en tres grandes grupos se realiza, sin emplear conocimientos del espacio proyectivo, atendiendo al número de líneas disponibles que puedan ser usadas como directriz.

Por otro lado, reservaremos en los ejemplos de aplicación la notación usual de los parámetros "**u**" y "**v**", con "**v**" como parámetro lineal, para la presentación final de la superficie con el fin de poder disponer de una notación estándar $\underline{\mathbf{r}}\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ que permita poder aplicar, de forma sistemática al resultado, los procedimientos del análisis vectorial en cuestiones de medida o de forma. Utilizaremos diferentes notaciones intermedias para los parámetros tales como λ, μ, θ, ω... cuando sea conveniente antes de expresar el resultado final en los parámetros "**u**" y "**v**".

1.- Superficies generadas con una directriz.

1.1.- La dirección de las generatrices es constante.

Este grupo lo constituyen los Cilindros.

1.1.1.- Se dispone de una curva en la que se apoyan las generatrices.

Si la directriz parametrizada es la $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) = (\mathbf{x(u)}, \mathbf{y(u)}, \mathbf{z(u)})$ y la dirección de las generatrices $\underline{\mathbf{d}} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, la ecuación del cilindro vendrá dada directamente por:

$$\underline{\mathbf{r}}\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x(u)}, \mathbf{y(u)}, \mathbf{z(u)}) + \mathbf{v}\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

1.1.2.- Cilindros circunscritos a una esfera.

El "contorno aparente" o de tangencia entre la esfera y el cilindro sirve como directriz. En la línea de contorno de contacto, la normal a la superficie debe ser normal a la dirección del cilindro. En una esfera, bastará hallar la curva intersección del plano normal a la dirección del cilindro trazado por el centro de la esfera con la propia esfera para disponer de la directriz.

1.2.- La dirección de las generatrices es la de las tangentes, binormales o normales principales de una curva en cada uno de sus puntos.

Las superficies generadas serán, respectivamente, la tangencial de la curva, la superficie de binormales o la de normales. Si la curva parametrizada – la directriz – es la $\underline{\mathbf{D}}\ (\mathbf{u}) = (\mathbf{x(u)}, \mathbf{y(u)}, \mathbf{z(u)})$, bastará tomar como dirección de las generatrices, respectivamente, las funciones vectoriales:

$$\dot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u}) \qquad \dot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u}) \times \ddot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u}) \qquad (\dot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u}) \times \ddot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u})) \times \dot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u})$$

resultando las superficies:

$\underline{\mathbf{r}}\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{D}}\ (\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \dot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u})$	tangencial
$\underline{\mathbf{r}}\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{D}}\ (\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \{\dot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u}) \times \ddot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u})\}$	de binormales
$\underline{\mathbf{r}}\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underline{\mathbf{D}}\ (\mathbf{u}) + \mathbf{v}\ \{(\dot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u}) \times \ddot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u})) \times \dot{\underline{\mathbf{D}}}\ (\mathbf{u})\}$	de normales principales

1.3.- Las generatrices son normales a una superficie.

El caso más interesante de estas superficies regladas lo constituyen las generadas por el campo de normales a una superficie restringido a una línea de la misma. Si obtenemos una representación paramétrica de la superficie en la forma $\underline{r}(\lambda, \mu)$, cualquier curva sobre la misma se define a través de las relaciones:

$$\lambda = \lambda(\mu) \quad \text{o bien} \quad \mu = \mu(\lambda) \quad \text{o bien} \quad \lambda = \lambda(\theta)\ ,\ \mu = \mu(\theta) \qquad (6)$$

lo que nos permite describir directamente la parametrización de la curva de $\underline{r}(\lambda, \mu)$ en función solo de λ, solo de μ o solo de θ, que utilizaremos como directriz. La dirección de las generatrices será la del vector $[\underline{r}_{\lambda} \times \underline{r}_{\mu}](\lambda, \mu)$ expresada bajo el mismo parámetro a través de la relación $_{(6)}$ utilizada. En notación vectorial, la representación paramétrica de la superficie será en cualquiera de los casos:

$$\underline{r}(\lambda(\mu), \mu) + v\,[\underline{r}_{\lambda} \times \underline{r}_{\mu}](\lambda(\mu), \mu)$$

$$\underline{r}(\lambda, \mu(\lambda)) + v\,[\underline{r}_{\lambda} \times \underline{r}_{\mu}](\lambda, \mu(\lambda))$$

$$\underline{r}(\lambda(\theta), \mu(\theta)) + v\,[\underline{r}_{\lambda} \times \underline{r}_{\mu}](\lambda(\theta), \mu(\theta))$$

1.4.- La dirección de las generatrices puede ser determinada mediante cualquier otra condición que nos permita escribirla en función del parámetro de una curva directriz. Helicoides reglados.

Bajo este título, podemos incluir un variado conjunto de superficies regladas determinadas por diferentes condiciones que permiten definir las rectas generatrices de la superficie, o bien aquéllas en que podemos expresar la dirección de las generatrices en función del mismo parámetro que el de una cierta curva directriz. Este conjunto de superficies no tienen una descripción general, dependiendo de las condiciones que nos permiten elegir una directriz y representar las direcciones de las generatrices con respecto al mismo parámetro o bien que nos permiten determinar directamente las rectas generatrices.

En este grupo podemos incluir los helicoides reglados.

Se denomina en general helicoide a la superficie engendrada por una línea que se mueve con movimiento helicoidal respecto de una recta que es el "eje" de la superficie; un movimiento helicoidal o "giro helicoidal" incluye un giro más una traslación paralela al eje.

Si la línea generatriz es una recta, entonces los helicoides se convierten en reglados. Si la recta, además, corta al eje, los helicoides reglados son "cerrados". Si las generatrices rectas no cortan al eje, el punto central de cada generatriz describe una hélice de garganta – una línea de estricción – y cuando, además, son tangentes a esta línea, entonces la superficie es el desarrollo tangencial de la hélice.

Para la representación de los helicoides reglados cerrados utilizaremos el eje como directriz y en los demás utilizaremos como directriz la hélice de puntos centrales. Generalmente los helicoides se representan en $\mathfrak{R}^3$ con su eje coincidente con **OZ**, lo que simplifica notablemente los cálculos.

Algunas de las superficies generadas con movimientos de rectas, de una u otra forma "helicoidales", podrían haber sido incluídas también en el siguiente conjunto (2) de "superficies generadas con dos directrices propias", en un apartado independiente en el que la condición para definir las generatrices es la de su movimiento de traslación y rotación alrededor de un eje.

Es usual denominar "helicoide oblicuo" a la superficie helicoidal reglada generada por rectas que se apoyan en una hélice circular y en su eje **OZ** con el que forman un ángulo constante "α". Esta superficie se genera, por lo tanto, con dos directrices propias. Las generatrices se apoyarán en las líneas $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \lambda)$ y $(\mathbf{a}\cos\mathbf{u}, \mathbf{a}\,\mathbf{sen}\,\mathbf{u}, \mathbf{b}\,\mathbf{u})$ por lo que tendrán la dirección $\{\mathbf{a}\cos\mathbf{u}, \mathbf{a}\,\mathbf{sen}\,\mathbf{u}, \mathbf{b}\,\mathbf{u} - \lambda\}$, que deberá formar con el eje un ángulo "α", es decir

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{bu} - \lambda}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + (\mathbf{bu} - \lambda)^2}},$$

de donde $\mathbf{b\ u - \lambda = \pm\ a\ cotg\ \alpha}$, así que la superficie se podrá representar por

$\mathbf{(a\cos u, a \text{ sen } u, b u) + w \{ a \cos u, a \text{ sen } u, \pm a\ \text{cotg}\ \alpha \} =}$
$\mathbf{= (a (1+w) \cos u, a (1+w) \text{ sen } u, b u \pm a w\ \text{cotg}\ \alpha)}$

Cuando $\alpha = \mathbf{90^o}$, $\mathbf{cotg}\ \alpha = \mathbf{0}$ y, con $\mathbf{1+w = v}$, se obtiene una representación paramétrica tradicional del llamado "helicoide recto": $\mathbf{(a v \cos u, a v \text{ sen } u, b u)}$

2.- Superficies generadas con dos directrices propias.

2.1.- Una de las directrices se reduce a un punto.

Este grupo lo constituyen los Conos.

Si las directrices son: el punto **(a, b, c)** – vértice del cono – y la curva parametrizada **(x(u), y(u), z(u))**, la superficie podrá escribirse:

$\underline{\mathbf{r}} (u, v) = \mathbf{(a, b, c) + v \{ x(u) - a, y(u) - b, z(u) - c\}}$

tomando como directriz el punto, o bien

$\underline{\mathbf{r}} (u, v) = \mathbf{(x(u), y(u), z(u)) + v \{ x(u) - a, y(u) - b, z(u) - c\}}$

tomando como directriz la curva.

2.1.1- Conos circunscritos a una esfera.

Al igual que los cilindros deberemos obtener el contorno de contacto entre ambas superficies. La curva de contacto puede determinarse imponiendo a las rectas que unen cualquier punto de la esfera con el vértice del cono la condición de ser normales a la normal a la superficie. Obtenida esta curva, disponemos ya del vértice y de una directriz.

2.2.- Las generatrices permanecen paralelas a un plano que denominamos director de la superficie.

Constituyen los denominados **cilindrioides**, si las dos directrices son curvas, y **conoides**, si al menos una de las directrices es recta.

En los conoides la directriz recta se denomina eje del conoide. Cuando el eje es normal al plano director se conoce con el nombre de conoide recto; en otro caso el conoide es oblicuo. Este conjunto de superficies regladas, todas ellas alabeadas, salvo que la superficie degenere en un plano, tienen interés preferente, junto a algunas otras, en su aplicación a las estructuras láminares y, en general, al diseño arquitectónico.

Si disponemos de las líneas parametrizadas

$$\underline{\mathbf{D}}_1 = (x_1(\lambda), y_1(\lambda), z_1(\lambda)) \quad \text{y} \quad \underline{\mathbf{D}}_2 = (x_2(\mu), y_2(\mu), z_2(\mu))$$

y de la ecuación del plano director, que escribiremos en la forma

$\mathbf{A\,x + B\,y + C\,z = 0}$

la dirección de las rectas que se apoyan en ambas tendrán la forma vectorial

$\underline{\mathbf{d}} = \{ x_1(\lambda) - x_2(\mu), y_1(\lambda) - y_2(\mu), z_1(\lambda) - z_2(\mu) \}$

y deberán ser normales al vector característico del plano, $\{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \}$, por lo que deberá satisfacerse:

$$\{ x_1(\lambda) - x_2(\mu), y_1(\lambda) - y_2(\mu), z_1(\lambda) - z_2(\mu) \} \ \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} = \mathbf{0}$$

De esta ecuación $\mathbf{A} (x_1(\lambda) - x_2(\mu)) + \mathbf{B} (y_1(\lambda) - y_2(\mu)) + \mathbf{B} (z_1(\lambda) - z_2(\mu)) = \mathbf{0}$ deberemos poder obtener la relación entre parámetros:

$\lambda = \lambda (\mu)$ o bien $\mu = \mu (\lambda)$ o bien: $\lambda = \lambda (\theta)$, $\mu = \mu (\theta)$

En cualquiera de los tres casos, podremos escribir la dirección de las generatrices en función de un solo parámetro, sea λ, μ, o un tercero θ. Tomaremos entonces como directriz la curva escrita en el parámetro en que hemos escrito la dirección de las generatrices, para expresar la superficie en la forma:

$$(x_1(\lambda), y_1(\lambda), z_1(\lambda)) + \mathbf{v} \ \underline{\mathbf{d}} \ (\lambda)$$

o bien

$$(x_2(\mu), y_2(\mu), z_2(\mu)) + \mathbf{v} \ \underline{\mathbf{d}} \ (\mu)$$

o bien

$$(x_3(\theta), y_3(\theta), z_3(\theta)) + \mathbf{v} \ \underline{\mathbf{d}} (\theta)$$

3.- Superficies generadas con tres directrices propias.

Este grupo es, finalmente, el caso más general de generación de superficies regladas. Podemos construir superficies con rectas que se apoyen en directrices que pueden ser indistintamente curvas o rectas. Cuando una de las directrices rectilíneas es impropia se convierte en un plano director, y este grupo contendría también los cilindroides y los conoides. Si una de las directrices, al menos, es rectilínea se la ha venido denominando **axoide**.

Si disponemos de las tres líneas parametrizadas,

$$(x_1(\lambda), y_1(\lambda), z_1(\lambda)) , (x_2(\mu), y_2(\mu), z_2(\mu)) , (x_3(\theta), y_3(\theta), z_3(\theta)),$$

las generatrices que se apoyan en las dos primeras deberán tener como dirección

$$\{ x_1(\lambda) - x_2(\mu), y_1(\lambda) - y_2(\mu), z_1(\lambda) - z_2(\mu) \},$$

las que se apoyen en la primera y la tercera

$$x_1(\lambda) - x_3(\theta), y_1(\lambda) - y_3(\theta), z_1(\lambda) - z_3(\theta) \},$$

y las que se apoyan en la segunda y tercera

$$\{ x_2(\mu) - x_3(\theta), y_2(\mu) - y_3(\theta), z_2(\mu) - z_3(\theta) \},$$

Al imponer que las generatrices deban apoyarse simultáneamente en las tres, las tres direcciones anteriores deberán ser equivalentes:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}} = \{ x_1(\lambda) - x_2(\mu), y_1(\lambda) - y_2(\mu), z_1(\lambda) - z_2(\mu) \} &\equiv \\ \equiv \{ x_1(\lambda) - x_3(\theta), y_1(\lambda) - y_3(\theta), z_1(\lambda) - z_3(\theta) \} &\equiv \\ \equiv \{ x_2(\mu) - x_3(\theta), y_2(\mu) - y_3(\theta), z_2(\mu) - z_3(\theta) \}& \end{aligned} \qquad (7)$$

y de aquí se sigue que deberán verificarse de forma simultánea las siguientes relaciones:

$$\frac{x_1(\lambda)-x_2(\mu)}{x_1(\lambda)-x_3(\theta)}=\frac{y_1(\lambda)-y_2(\mu)}{y_1(\lambda)-y_3(\theta)}=\frac{z_1(\lambda)-z_2(\mu)}{z_1(\lambda)-z_3(\theta)}$$

$$\frac{x_1(\lambda)-x_2(\mu)}{x_2(\mu)-x_3(\theta)}=\frac{y_1(\lambda)-y_2(\mu)}{y_2(\mu)-y_3(\mu)}=\frac{z_1(\lambda)-z_2(\mu)}{z_2(\mu)-z_3(\theta)} \qquad (8)$$

$$\frac{x_1(\lambda)-x_3(\theta)}{x_2(\mu)-x_3(\theta)}=\frac{y_1(\lambda)-y_3(\theta)}{y_2(\mu)-y_3(\mu)}=\frac{z_1(\lambda)-z_3(\theta)}{z_2(\mu)-z_3(\theta)}$$

De estas relaciones deberemos poder deducir expresiones tales como

$\lambda = \lambda\ (\mu)$ o bien $\mu = \mu\ (\lambda)$

$\lambda = \lambda\ (\theta)$ o bien $\theta = \theta\ (\lambda)$

$\mu = \mu\ (\theta)$ o bien $\mu = \mu\ (\theta)$

o bien se deberá poder deducir de ellas, expresiones de la forma $\mu = \mu\ (\omega)$, $\lambda = \lambda\ (\omega)$, $\theta = \theta(\omega)$ en función de un cuarto parámetro.

Disponiendo de alguna de estas relaciones, podrá escribirse la dirección de las generatrices $_{(7)}$ en función de un solo parámetro, λ , μ , θ , o bien ω. Bastará entonces tomar como directriz cualquiera de las líneas expresada en el mismo parámetro que la dirección de las generatrices para expresar la superficie en la forma

$(x_1(\lambda), y_1(\lambda), z_1(\lambda)) + v\ \underline{\mathbf{d}}\ (\lambda)$,

o bien

$(x_2(\mu), y_2(\mu), z_2(\mu)) + v\ \underline{\mathbf{d}}\ (\mu)$,

o bien

$(x_3(\theta), y_3(\theta), z_3(\theta)) + v\ \underline{\mathbf{d}}\ (\theta)$,

o bien

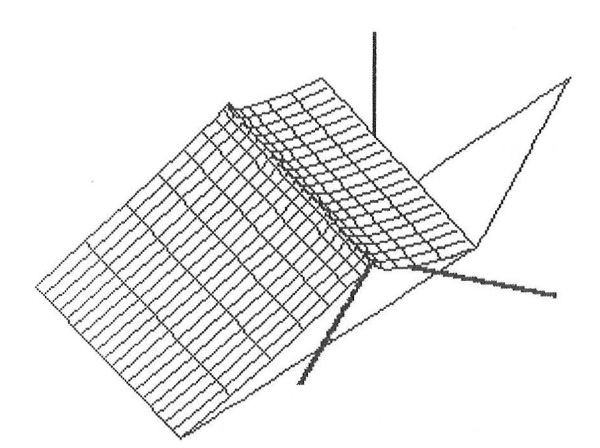
$(x_4(\omega), y_4(\omega), z_4(\omega)) + v\ \underline{\mathbf{d}}\ (\omega)$.

Naturalmente, no siempre resulta posible formar una superficie reglada con tres directrices arbitrarias. El sistema $_{(8)}$ deberá ser compatible, y obtenida la relación entre todos los parámetros involucrados, las direcciones $_{(7)}$ deberán resultar equivalentes; sin embargo, si la superficie existe, entonces nos basta una sola relación entre parámetros que podamos obtener de $_{(7)}$ para poder construir la representación.

§4.-Ejercicios de aplicación

E1

Superficie generada por rectas perpendiculares al plano $\mathbf{y - z - 3 = 0}$ que se apoyan en la curva $\mathbf{y^2 = x^3}$, $\mathbf{z{=}y}$

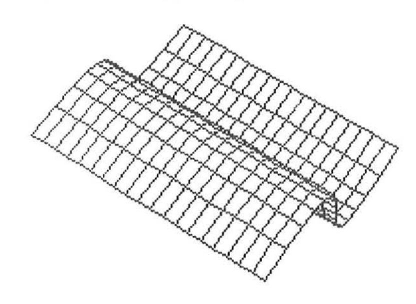


La curva intersección en forma paramétrica puede escribirse $(\mathbf{u^2, u^3, u^3})$ y la dirección de las generatrices será la del vector $\{\mathbf{0, 1, -1}\}$, así que una representación paramétrica del cilindro será:

$$(\mathbf{u^2, u^3, u^3}) + \mathbf{v}\,\{\mathbf{0, 1, -1}\} = (\mathbf{u^2, u^3 + v, u^3 - v})$$

E2

Superficie de generatrices paralelas a la recta $\mathbf{y = 2\,x}$, $\mathbf{z = 1}$ y directriz la curva $\mathbf{y = 0}$, $\mathbf{x = 3\,z^3}$.

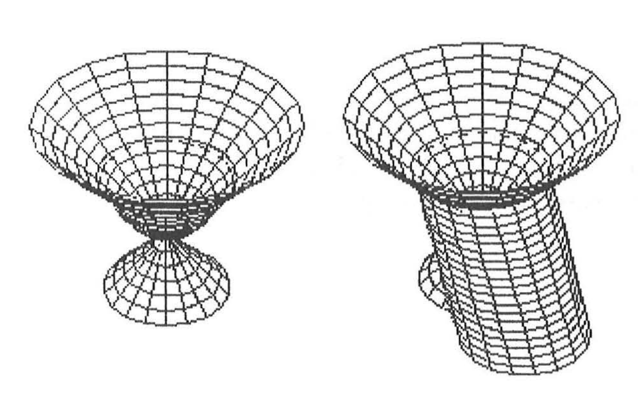


La directriz puede representarse por $(\mathbf{3\,u^3, 0, u})$. La dirección de las generatrices puede obtenerse tomando dos puntos cualesquiera de la recta: por ejemplo el $(\mathbf{1, 2, 1})$ y el $(\mathbf{0, 0, 1})$ y, restando, obtenemos la dirección $\{\mathbf{1, 2, 0}\}$, o bien puede escribirse una forma paramétrica de la recta, $(\lambda, 2\,\lambda, \mathbf{1})$, de la que se desprende directamente su dirección. La superficie buscada podrá representarse por

$$(\mathbf{3\,u^3, 0, u}) + \mathbf{v}\,\{\mathbf{1, 2, 0}\} = (\mathbf{3\,u^3 + v, 2\,v, u})$$

E3

Superficie generada por rectas contenidas en los planos $\mathbf{x + y + z + m = 0}$, $\mathbf{x - y + n = 0}$ y que se apoyan en la intersección del cono $\mathbf{z^2 = x^2 + y^2}$ con el paraboloide $\mathbf{z = x^2 + y^2}$.



Las generatrices serán normales a los vectores característicos de los planos por lo que su dirección $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ satisfará, simultaneamente, las ecuaciones

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$\alpha - \beta = 0$$

de donde

$$\beta = \alpha \quad \text{y} \quad \gamma = -2\,\alpha.$$

La dirección de las generatrices, por lo tanto, será la $\{\alpha, \alpha, -2\,\alpha\} \equiv \{\mathbf{1, 1, -2}\}$.

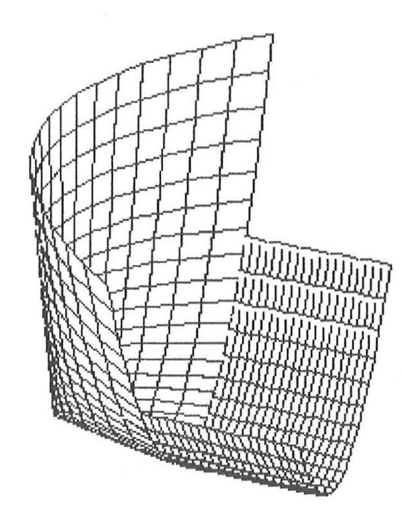
Por otro lado, la intersección del cono y el paraboloide satisfará $\mathbf{z^2 = z} \rightarrow \mathbf{z = 0}$, $\mathbf{z = 1}$, por lo que resulta ser la circunferencia $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$, $\mathbf{z = 1}$ que puede representarse $(\mathbf{cos\ u, sen\ u, 1})$, así que la superficie, finalmente, podrá escribirse

$$(\mathbf{cos\ u, sen\ u, 1}) + \mathbf{v}\,\{\mathbf{1, 1, -2}\} = (\mathbf{v + cos\ u, v + sen\ u, 1 - 2\,v})$$

[La intersección para $\mathbf{z = 0}$ nos proporciona el vértice del cono $(\mathbf{0, 0, 0})$ que no forma superficie con las generatrices]

E4

Superficie generada por las binormales de la curva intersección del cono $x^2 = y\ z$ con el plano $y = 1$.

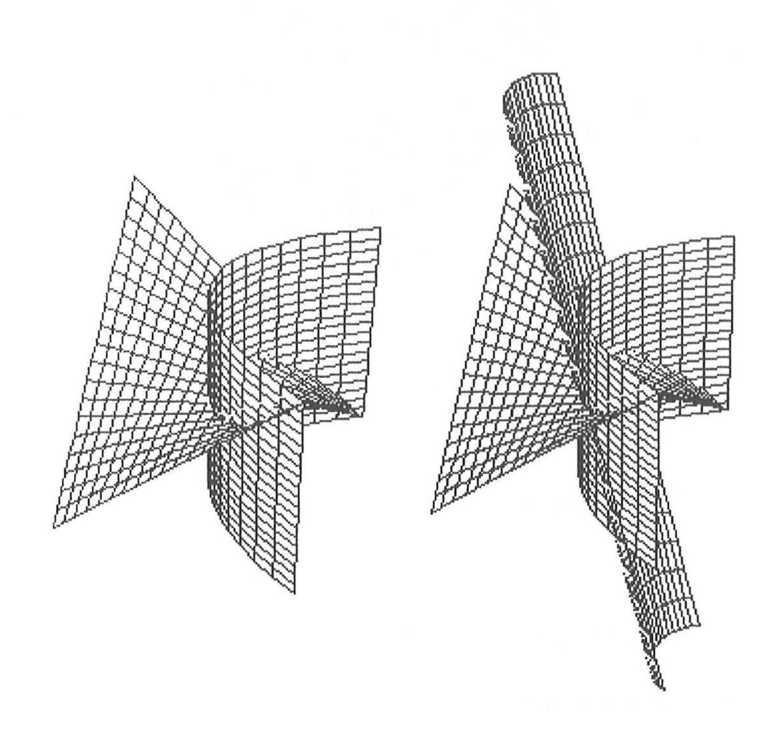


La curva intersección es una curva plana, en el plano $y = 1$, así que la dirección será la del vector normal a este plano $\{ 0, 1, 0 \}$; una de sus representaciones paramétricas será la $(u, 1, u^2)$, por lo que una representación del cilindro será:

$$(u, 1, u^2) + v \{ 0, 1, 0 \} = (u, 1 + v, u^2)$$

E5

Superficie generada por rectas paralelas a los planos $x + y + z = 1$, $x - y - 2 = 0$ y que se apoyan en la curva $y = x^2$, $z = x\,y$.



Las generatrices tienen la dirección de la intersección de los dos planos, que puede ser obtenida encontrando dos puntos cualesquiera de la misma, o sea: dos ternas que satisfagan simultáneamente la ecuación de los dos planos: por ejemplo los puntos $(3, 1, -3)$ y $(2, 0, -1)$, lo que nos permite escribir como dirección la $\{ 1, 1, -2 \}$.

Por otro lado, la curva puede ser representada por la parametrización (u, u^2, u^3), así que el cilindro puede venir, finalmente, representado por

$$(u, u^2, u^3) + v \{ 1, 1, -2 \} = (u + v, u^2 + v, u^3 - 2 v)$$

E6

Cilindro de generatrices horizontales y paralelas al plano $x = y$, circunscrito a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,x$.

La dirección de las generatrices será $\{ \alpha, \beta, 0 \}$ – horizontales, paralelas al **XOY** – y, además, normales al vector característico del plano $x = y$ que es el $\{ 1, -1, 0 \}$ por lo que resulta ser equivalente a la $\{ 1, 1, 0 \}$. La ecuación de la esfera puede escribirse en la forma $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$, de donde deducimos directamente que su centro es el $(1, 0, 0)$ con radio unidad.

El plano normal a la dirección $\{ 1, 1, 0 \}$ será el $x + y + c = 0$, y el que pasa por el centro de la esfera deberá satisfacer $c = -1$ por lo que será el $x + y - 1 = 0$. La circunferencia de contacto será la intersección de la esfera con este plano, curva definida por ambas ecuaciones:

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x + y - 1 = 0$$

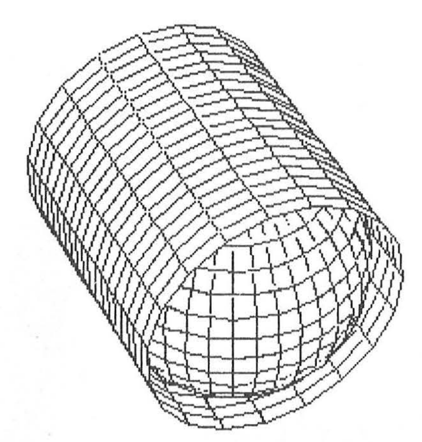
Tomando $y = 1 - x$ de la segunda ecuación y llevando este valor a la primera obtenemos la relación complementaria $2\,(x-1)^2 + z^2 = 1$, así que podemos parametrizar esta curva tomando

$$\sqrt{2}\,(x-1) = \cos u \;\rightarrow\; x = \frac{\cos u}{\sqrt{2}} + 1, \qquad z = \operatorname{sen} u,$$

resultando $y = 1 - x = -\dfrac{\cos u}{\sqrt{2}}$ y por lo tanto la parametrización $\left(\dfrac{\cos u}{\sqrt{2}} + 1, -\dfrac{\cos u}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen} u \right)$

Alternativamente esta circunferencia de contacto puede obtenerse escribiendo la esfera en su forma paramétrica (coordenadas esféricas) $\underline{r}\ (\phi, \theta) = (1 + \cos\phi \cos\theta, \cos\phi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi)$ y la dirección de su normal será la $\underline{r}_{\phi} \times \underline{r}_{\theta} = \{ -\cos^2\phi \cos\theta, -\cos^2\phi \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi \cos\phi \}$, que deberá ser normal al vector $\{ 1, 1, 0 \}$ por lo que deberá satisfacer la ecuación:

$$\cos^2\phi\ \cos\theta + \cos^2\phi\ \operatorname{sen}\theta = 0$$



de donde obtenemos la condición

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$$

que representa la circunferencia de contacto

$$\left(\frac{\cos\phi}{\sqrt{2}} + 1, -\frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}\phi \right)$$

[La solución $\cos\phi = 0$ determina los polos de la esfera]

Obtenida la curva de contacto por cualquiera de los dos métodos, pude tomarse como directriz para representar la ecuación del cilindro circunscrito

$$\left(\frac{\cos u}{\sqrt{2}} + 1, -\frac{\cos u}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen} u \right) + v\,\{ 1, 1, 0 \} = \left(\frac{\cos u}{\sqrt{2}} + 1 + v, -\frac{\cos u}{\sqrt{2}} + v, \operatorname{sen} u \right)$$

E7

Superficie de tangentes, binormales y normales principales a la hélice circular $x^2 + y^2 = 1$, $y = x\ \operatorname{tg} z$.

La parametrización usual de la hélice es la $\underline{D}(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, u)$.

Con los vectores $\dot{\underline{D}}\,(u) = \{ -\operatorname{sen} u, \cos u, 1 \}$ y $\ddot{\underline{D}}\,(u) = \{ -\cos u, -\operatorname{sen} u, 0 \}$

determinamos las direcciones de la tangente

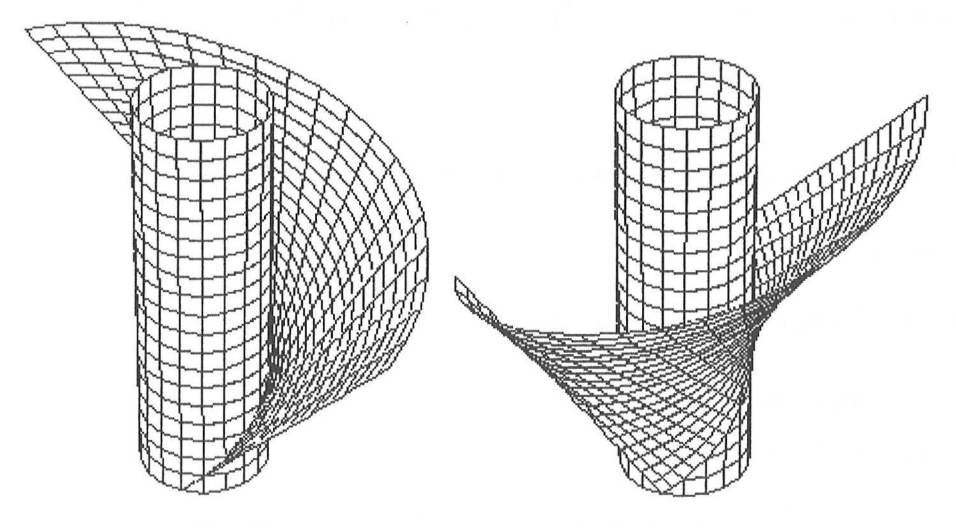
$$\dot{\underline{D}}\,(u) = \{ -\operatorname{sen} u, \cos u, 1 \}$$

y de la binormal

$$\dot{\underline{D}}\,(u) \times \ddot{\underline{D}}\,(u) = \{ \operatorname{sen} u, -\cos u, 1 \}$$

que nos permiten representar la superficie tangencial de la hélice – el helicoide desarrollable – y la superficie de binormales de la curva, que son, respectivamente:

$$(\cos u, \operatorname{sen} u, u) + v \{ -\operatorname{sen} u, \cos u, 1 \} = (\cos u - v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u + v \cos u, u + v)$$
$$(\cos u, \operatorname{sen} u, u) + v \{ \operatorname{sen} u, -\cos u, 1 \} = (\cos u + v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u - v \cos u, u + v)$$



En cuanto a la superficie de normales principales, la dirección de las generatrices será la del vector:

$$(\dot{\underline{D}} (u) \times \ddot{\underline{D}} (u)) \times \dot{\underline{D}} (u) = \{ -2 \cos u, -2 \operatorname{sen} u, 0 \} \equiv \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \}$$

que resultan ser horizontales y, además, coplanarias y normales al eje **OZ** de la hélice.

[Las direcciones $\{ \cos u, \operatorname{sen} u, u \}$, $\{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \}$, $\{ 0, 0, 1 \}$ resultan ser linealmente dependientes, las direcciones $\{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \}$ y $\{ 0, 0, 1 \}$ son perpendiculares]

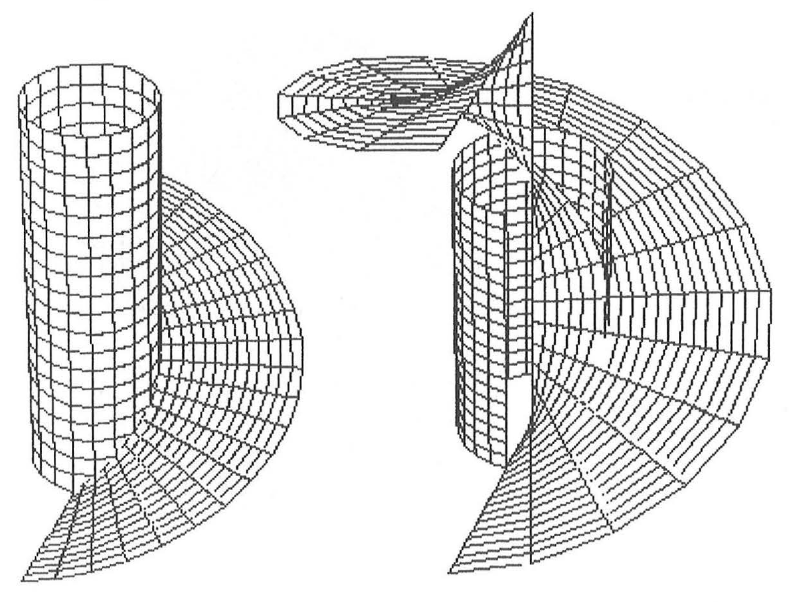
La superficie de normales generada contiene por lo tanto al eje **OZ** y podrá ser representada por

$$(\cos u, \operatorname{sen} u, u) + \lambda \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \} = ((1+\lambda) \cos u , (1+\lambda) \operatorname{sen} u, u)$$

y con $1+\lambda = v$, obtenemos la representación equivalente

$$(v \cos u , v \operatorname{sen} u, u) = (0, 0, u) + v \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \}$$

que sería la correspondiente a tomar el eje **OZ** como directriz puesto que es una línea de la superficie que corta a todas las generatrices.



[Esta superficie de normales es una superficie helicoidal cerrada y es, además, un conoide recto con plano director el plano **XOY**, perpendicular al eje **OZ**. Es una superficie que, además, resulta ser la única superficie mínima reglada alabeada. En sus variadas formas y sus diferentes regiones tiene una gran presencia en el diseño arquitectónico.]

E8

Superficie de normales principales a la hélice cónica (e^u **cos u,** e^u **sen u,** e^u)

Con $\underline{D}(u) = \{ e^u \cos u, e^u \sin u, e^u \}$ obtenemos los vectores

$\dot{\underline{D}}(u) = \{ e^u (\cos u - \text{sen } u), e^u (\text{sen } u + \cos u), e^u \}$ y $\ddot{\underline{D}}(u) = \{ -2 e^u \text{sen } u, 2 e^u \cos u, e^u \}$

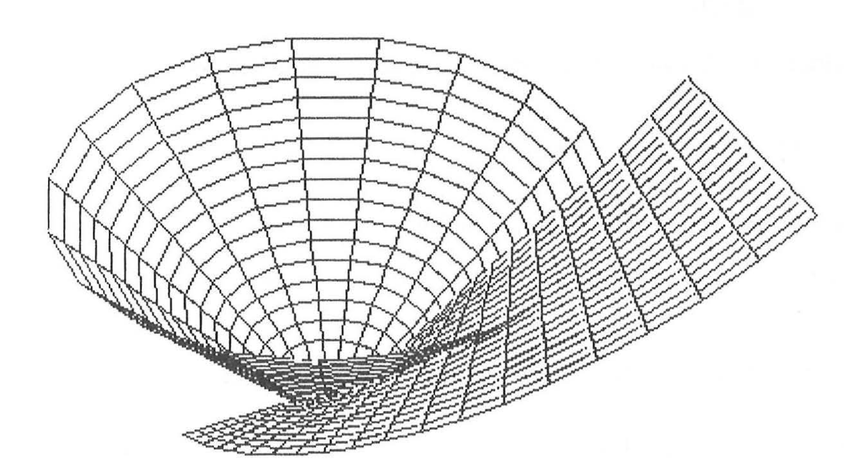
y la dirección:

$(\dot{\underline{D}}(u) \times \ddot{\underline{D}}(u)) \times \dot{\underline{D}}(u) = \{ -3 e^{3u} (\text{sen } u + \cos u), 3 e^{3u} (\cos u - \text{sen } u), 0 \}$

equivalente a la $\{ -(\text{sen } u + \cos u), \cos u - \text{sen } u, 0 \}$

por lo que podremos escribir la representación de la superficie en la forma:

$$(e^u \cos u, e^u \text{sen } u, e^u) + v \{ -(\text{sen } u + \cos u), \cos u - \text{sen } u, 0 \} =$$
$$= (e^u \cos u - v(\text{sen } u + \cos u), e^u \text{sen } u + v(\cos u - \text{sen } u), e^u)$$



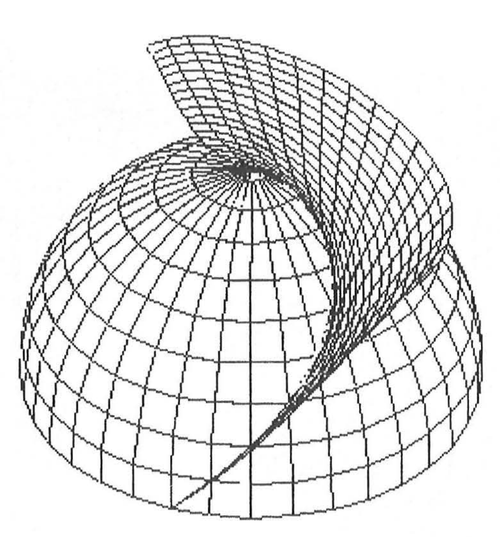
La hélice está contenida en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Como en el caso de la hélice circular de E7, las normales principales a esta hélice cónica son horizontales, sin embargo en este caso no son coplanarias con **OZ** – eje de la hélice –, así que esta superficie no determina un conoide.

[Las direcciones
$\{ e^u \cos u, e^u \text{sen } u, e^u \}$,
$\{ -(\text{sen } u + \cos u), \cos u - \text{sen } u, 0 \}$,
$\{ 0, 0, 1 \}$,
resultan ser linealmente independientes]

En E24 se genera el conoide de las rectas horizontales que se apoyan en el eje **OZ** y en esta hélice cónica, donde pueden compararse ambas superficies en su intersección con el cono.

E9

Superficie de desarrollo tangencial de la curva de Viviani, intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ con la esfera de radio **2** y centro el origen de coordenadas.



Una parametrización de la intersección de ambas superficies

$(x-1)^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$

puede obtenerse haciendo $x - 1 = \cos u$, $y = \text{sen } u$

con lo que $z = \sqrt{4 - (1 + \cos u)^2 - \text{sen}^2 u} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \cos u} = 2 \,\text{sen}\, \frac{u}{2}$

y la curva de Viviani puede representarse por la parametrización

$(1 + \cos u, \ \text{sen } u, 2 \,\text{sen}\, \frac{u}{2})$

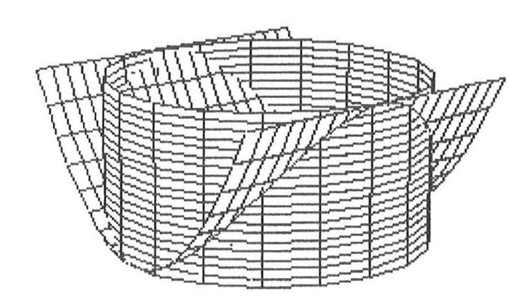
así que la superficie de sus tangentes será la

$$(1 + \cos u,\ \operatorname{sen} u, 2 \operatorname{sen} \frac{u}{2}) + v \{ -\operatorname{sen} u, \cos u, \cos \frac{u}{2} \} =$$

$$= (1 + \cos u - v \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} u + v \cos u, 2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} + v \cos \frac{u}{2})$$

E10

Superficie generada por las normales al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ a lo largo de la curva intersección con la superficie $z = y^2$.



La curva intersección de ambas superficies puede representarse por $(\cos u, \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}^2 u)$. Una representación del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ congruente con la anterior es la $\underline{r}\ (u, \lambda) = \{ \cos u, \operatorname{sen} u, \lambda \}$, en la que la condición $\lambda = \operatorname{sen}^2 u$ determina la curva intersección. Las normales a esta superficie tendrán la dirección del vector:

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_\lambda = \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \}$$

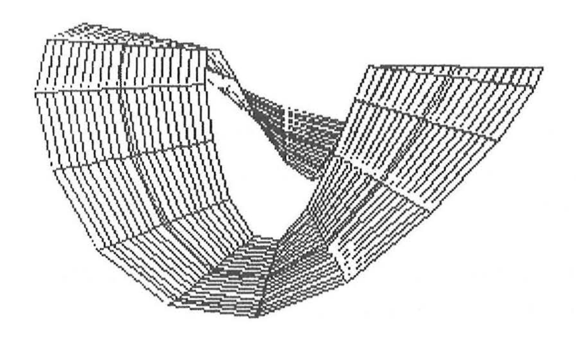
La superficie de normales sigue la forma general $\underline{r}\ (u, \lambda) + \mu [\underline{r}_u \times \underline{r}_\lambda] (u, \lambda)$ con $\lambda = \operatorname{sen}^2 u$, así que será:

$$(\cos u, \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}^2 u) + \mu \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \} = ((1+\mu) \cos u, (1+\mu) \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}^2 u)$$

y haciendo, si se desea, $1+\mu = v$, puede utilizarse la representación más sencilla

$$(v \cos u, v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}^2 u) = (0, 0, \operatorname{sen}^2 u) + v \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \}$$

equivalente a tomar el eje **OZ** – incluído en la superficie de normales – como directriz.



E11

Superficie generada por las normales al cilindro $z = y^2$ a lo largo de la curva intersección con la superficie $x^2 + y^2 = 1$.

Las superficies son las de E10. La curva intersección puede representarse por $(\cos u, \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}^2 u)$. Una representación del cilindro $z = y^2$ congruente con la anterior es la $\underline{r}\ (u, \lambda) = \{ \lambda, \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}^2 u \}$ en la que la condición $\lambda = \cos u$ determina la curva intersección. Las normales a esta superficie tendrán la dirección del vector:

$$\underline{r}_\lambda \times \underline{r}_u = \{ 0, -\operatorname{sen} 2u, \cos u \}$$

La superficie de normales sigue la forma general $\underline{r}\,(u, \lambda) + \mu\,[\underline{r}_{\lambda} \times \underline{r}_{u}]\,(u, \lambda)$ con $\lambda = \cos u$, por lo que la superficie buscada vendrá representada por:

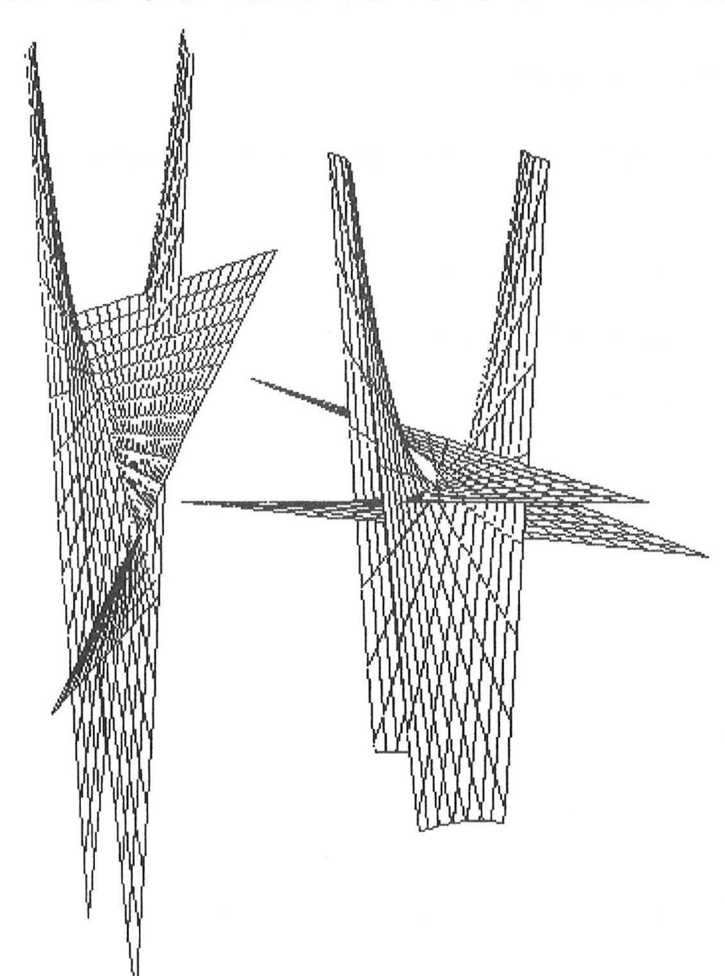
$$(\cos u, \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}^2 u) + v\,\{0, -\operatorname{sen} 2u, \cos u\} = (\cos u, \operatorname{sen} u - v \operatorname{sen} 2u, \operatorname{sen}^2 u + v \cos u)$$

E12

Superficies generadas por las rectas normales al paraboloide $z = x^2 - y^2$ a lo largo de las rectas de la superficie que pasan por el punto $(1, 1, 0)$.

Por cada punto de $z = x^2 - y^2$ pasan dos rectas generatrices. Para simplificar, podemos utilizar directamente la parametrización del paraboloide referido a sus generatrices $\underline{r}\,(\lambda, u) = (\lambda + u, \lambda - u, 4\lambda u)$ en la que las líneas asintóticas son las líneas coordenadas. La dirección de las normales a esta superficie será la del vector:

$$\underline{r}_{\lambda} \times \underline{r}_{u} = \{4(u + \lambda), 4(u - \lambda), -2\} \equiv \{2(u + \lambda), 2(u - \lambda), -1\}$$



Por el punto $(1, 1, 0)$ correspondiente a las coordenadas curvilíneas $\lambda = 1$, $u = 0$ pasan las generatrices

$$(1 + u, 1 - u, 4u) \quad \text{y} \quad (\lambda, \lambda, 0)$$

consecuencia de substituir, respectivamente, los valores $\lambda = 1$ y $u = 0$ en la ecuación de la superficie.

Ambas superficies de normales a lo largo de estas rectas siguen la misma forma general:

$$\underline{r}\,(\lambda, u) + [\underline{r}_{\lambda} \times \underline{r}_{u}]\,(\lambda, u)$$

por lo que substituyendo, respectivamente, $\lambda = 1$ y $u = 0$ en cada uno de los casos, obtenemos las representaciones paramétricas:

$$(1 + u, 1 - u, 4u) + v\,\{2(u + \lambda), 2(u - \lambda), -1\} = ((1 + u)(1 + 2v), (1 - u)(1 - 2v), 4u - v)$$

$$(\lambda, \lambda, 0) + v\,\{2(u + \lambda), 2(u - \lambda), -1\} = (\lambda(1 + 2v), \lambda(1 - 2v), -v)$$

E13

Superficie de normales al helicoide recto (**μ cos u, μ sen u, u**) a lo largo de cualquiera de sus líneas de curvatura que pasen por el origen de coordenadas.

Las direcciones principales de la superficie pueden ser obtenidas en la forma **{ 1, λ (μ,u) }** – en el plano tangente a la superficie en cada punto – resolviendo la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ e & f & g \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0$$

donde **E, F, G; e, f, g** son los coeficientes de las dos primeras formas cuadráticas fundamentales, funciones escalares de los parámetros **μ, u**.

Obtenidos los coeficientes, la ecuación anterior puede escribirse en este caso

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+\mu^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (1+\mu^2)\ \lambda^2 - 1 = 0$$

[Observese que para simplificar los cálculos pueden utilizarse términos proporcionales a ambos conjuntos de coeficientes]

de aquí obtenemos las soluciones

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

que nos permiten integrar las ecuaciones

$$\frac{du}{d\mu} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \pm\, du = \frac{d\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \arg sh\ \mu = \pm\ u + c \qquad \Rightarrow \qquad \mu = sh\ (\ c \pm u\ )$$

Las líneas de curvatura principal se obtienen substituyendo, respectivamente, estos resultados en la parametrización de la superficie (**μ cos u, μ sen u, u**), y así resultan las dos familias de curvas:

(cos u sh (c $\pm$ u) , sen u sh (c $\pm$ u), u)

De estas dos familias elegiremos, por ejemplo, la **(cos u sh (c + u) , sen u sh (c + u), u)** y de aquí, la que pasa por el origen de coordenadas **(0, 0, 0) → u=0 , μ = 0**, que corresponde al valor **c= 0**, lo que nos determina finalmente la curva

(cos u sh u , sen u sh u, u)

que resulta ser la curva determinada en la superficie por la relación de parámetros **μ = sh u**.

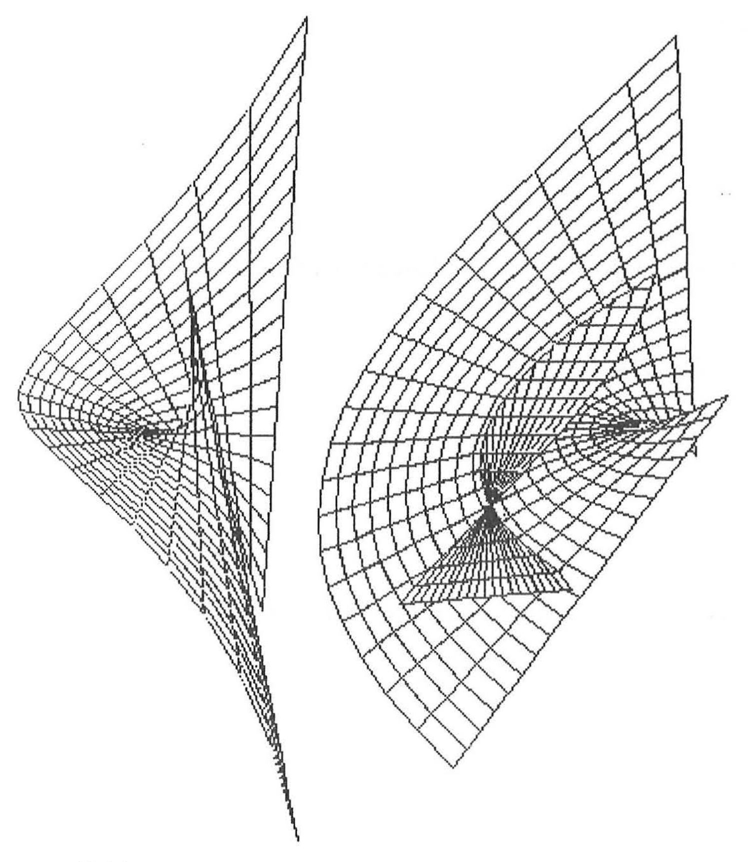
Por otra parte las normales a la superficie tendrán la dirección del vector:

$$\underline{r}_\mu \times \underline{r}_u = \{sen\ u, -\cos u, \mu\}$$

y el conjunto de normales sobre la curva **μ = sh u** tendrán por lo tanto la dirección **{sen u, – cos u, sh u }**

así que la superficie de normales solicitada podrá representarse por

$$(\cos u \ \text{sh}\, u, \text{sen}\, u \ \text{sh}\, u, u) + v\,\{\text{sen}\, u, -\cos u, \text{sh}\, u\} =$$
$$= (\cos u \ \text{sh}\, u + v \,\text{sen}\, u, \text{sen}\, u \ \text{sh}\, u - v\cos u, u + v\,\text{sh}\, u)$$



[Esta superficie resulta ser desarrollable. Puede obtenerse su arista de retroceso. El resultado es que queda determinada para la relación $v = -\text{ch}\, u$, es decir, la curva:

$(\cos u \ \text{sh}\, u - \text{ch}\, u \ \text{sen}\, u, \text{sen}\, u \ \text{sh}\, u + \text{ch}\, u \ \cos u, u - \text{ch}\, u \ \text{sh}\, u)$

Puede comprobarse ahora que las tengentes a esta curva tienen la dirección de las generatrices.
Como se sabe, este resultado es generalizable, ya que para que una curva de una superficie sea una línea de curvatura principal es condición necesaria y suficiente el que la superficie de normales a lo lago de la curva sea una superficie desarrollable.]

E 14

Superficie generada por rectas que se apoyan en la curva $(e^u, e^{-u}, -\sqrt{2}\,u)$ de manera que se conservan en su plano rectificante formando un ángulo de 45° con su tangente y con su normal principal.

De la curva parametrizada $\underline{D}(u) = (e^u, e^{-u}, -\sqrt{2}\,u)$ obtenemos los vectores

$$\dot{\underline{D}}(u) = \{e^u, -e^{-u}, -\sqrt{2}\} \quad \text{y} \quad \ddot{\underline{D}}(u) = \{e^u, e^{-u}, 0\}$$

y el producto vectorial $\dot{\underline{D}}(u) \times \ddot{\underline{D}}(u) = \{\sqrt{2}\ e^{-u}, -\sqrt{2}\ e^{u}, 2\}$,

siendo $|\dot{\underline{D}}(u)| = \sqrt{e^{2u} + e^{-2u} + 2} = e^u + e^{-u}$ y $|\dot{\underline{D}}(u) \times \ddot{\underline{D}}(u)| = \sqrt{2e^{-2u} + 2e^{2u} + 4} = \sqrt{2}\ (e^u + e^{-u})$,

así que los vectores tangente y binormal serán:

$$\underline{t} = \left\{\frac{e^u}{e^u + e^{-u}}, -\frac{e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, -\frac{\sqrt{2}}{e^u + e^{-u}}\right\}$$

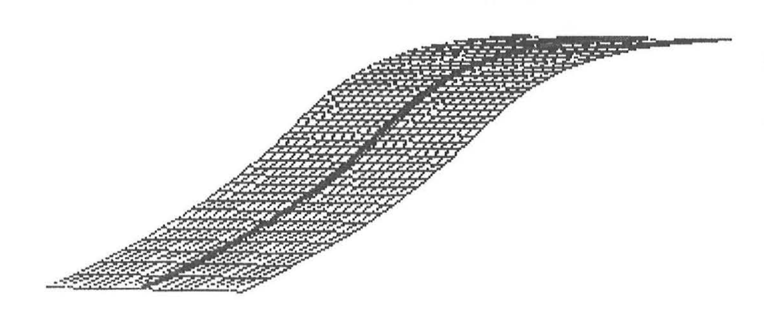
$$\underline{b} = \left\{\frac{e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, -\frac{e^u}{e^u + e^{-u}}, \frac{\sqrt{2}}{e^u + e^{-u}}\right\},$$

la dirección de las generatrices será, pues, equivalente a la del vector

$\underline{t} + \underline{b} = \{ 1, -1, 0 \}$

que es una dirección constante y por lo tanto la superficie resulta ser un cilindro:

$$(e^{u}, e^{-u}, -\sqrt{2}\, u) + v \{ 1, -1, 0 \} = (e^{u} + v , e^{-u} - v, -\sqrt{2}\, u)$$



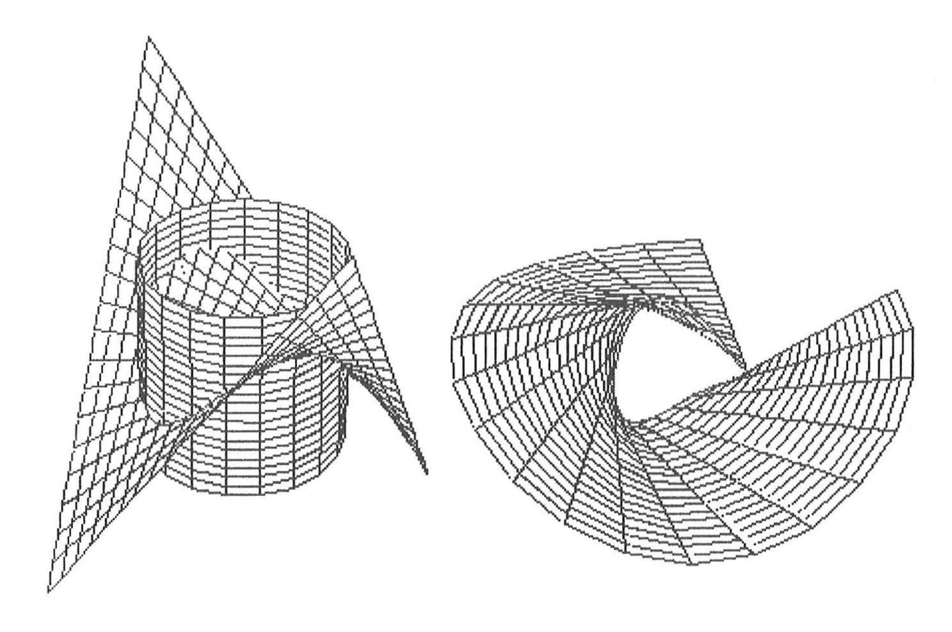
[La curva elegida es una hélice de eje { −1, 1, 0 } en el plano rectificante de la curva, por eso sus tangentes forman constantemente el mismo ángulo de 45º con esta dirección. Las generatrices tienen la dirección del eje de la hélice]

E 15

Superficie generada por rectas horizontales que se apoyan en la curva intersección de las superficies

$$x^2+y^2 = 1 \quad , \quad z = x\,y$$

de manera que en cada uno de sus puntos las proyecciones de recta y curva sobre el plano **XOY** sean tangentes.



Las direcciones de las generatrices, al ser horizontales, tendrán la tercera componente nula. La curva puede representarse por la parametrización

(cos u, sen u, cos u sen u),

su proyección sobre el plano **XOY** (**z = 0**) será la curva

(cos u, sen u, 0)

y sus tangentes tendrán la dirección

{ – sen u, cos u, 0 }

así que la superficie podrá representarse por:

(cos u, sen u, cos u sen u) + v { – sen u, cos u, 0 } = (cos u – v sen u, sen u + v cos u , cos u sen u)

E16

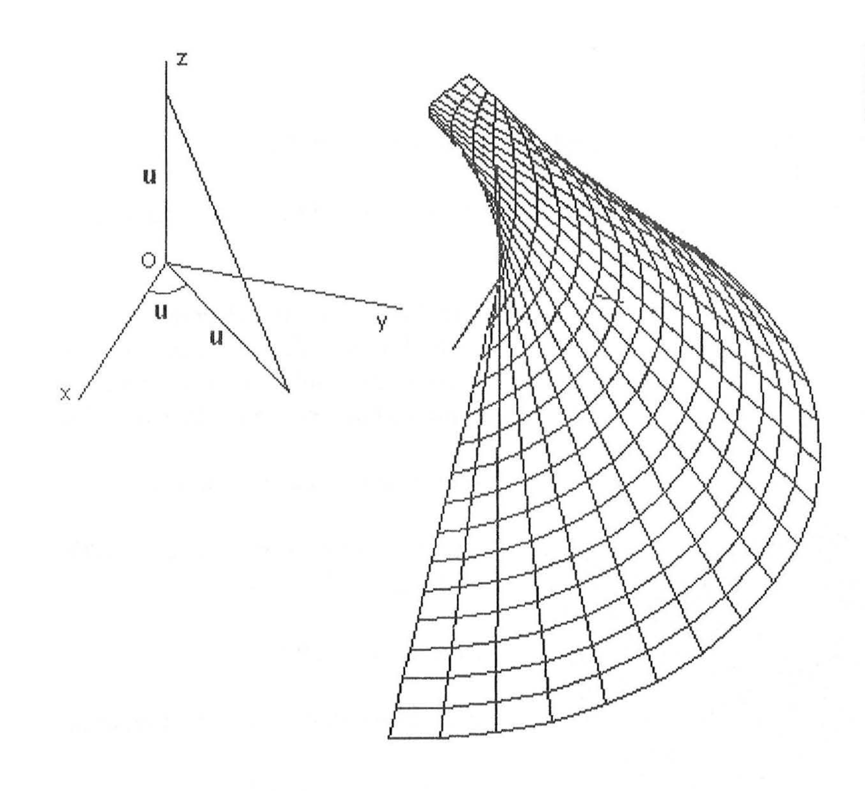
Superficie que se genera al girar una recta una vuelta completa alrededor del eje **OZ** apoyándose en dicho eje y en el plano horizontal **XOY**, y formando con ambos una ángulo de **45º**, siendo, en cada posición, la altura del punto de corte con el eje **OZ** – desde el origen de coordenadas – igual al ángulo, en radianes, que forma la proyección de la recta sobre el plano horizontal con el eje **OX**.

La generatriz corta al eje **OZ** en el punto **(0, 0, u)** y el punto de corte con el plano $z = 0$ deberá ser **(u cos u, u sen u, 0)**, habiendo tomado como parámetro "**u**" el ángulo girado por la proyección de la recta sobre el plano horizontal con el eje **OX**, así que, restando las coordenadas de los puntos, las generatrices tendrán como dirección **{ u cos u, u sen u, – u }** que con $u \neq 0$ resultará ser equivalente a la

{ cos u, sen u, –1 }

Tomando ahora el eje **OZ** como directriz, la superficie podrá representarse por

(0, 0, u) + v { cos u, sen u, –1 }= (v cos u, v sen u, u – v }



[una vuelta completa implica que el parámetro queda limitado por $u \in [0,2\pi]$ en tanto el parámetro "**v**" queda ilimitado]

E 17

Superficie engendrada por un segmento de recta de longitud $\frac{\pi}{2}$ cuyos extremos se apoyan respectivamente en el eje **OZ** y en el plano **XOY**. El segmento gira alrededor del eje **OZ**, siendo el ángulo girado por el plano que contiene el segmento y el eje con respecto al plano **XOZ** igual a la altura – sobre el plano horizontal– del extremo del segmento sobre el eje.

Los puntos extremos del segmento serán **(0, 0, u)** y **(a, b, 0)** de manera que $a = \rho \cos u$, $b = \rho \operatorname{sen} u$, con $\sqrt{a^2 + b^2 + u^2} = \sqrt{\rho^2 + u^2} = \frac{\pi}{2}$, así que $\rho = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2}$,

con lo que los dos extremos del segmento podrán escribirse

$$(0, 0, u) \qquad y \qquad \left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \cos u, \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \operatorname{sen} u, 0 \right)$$

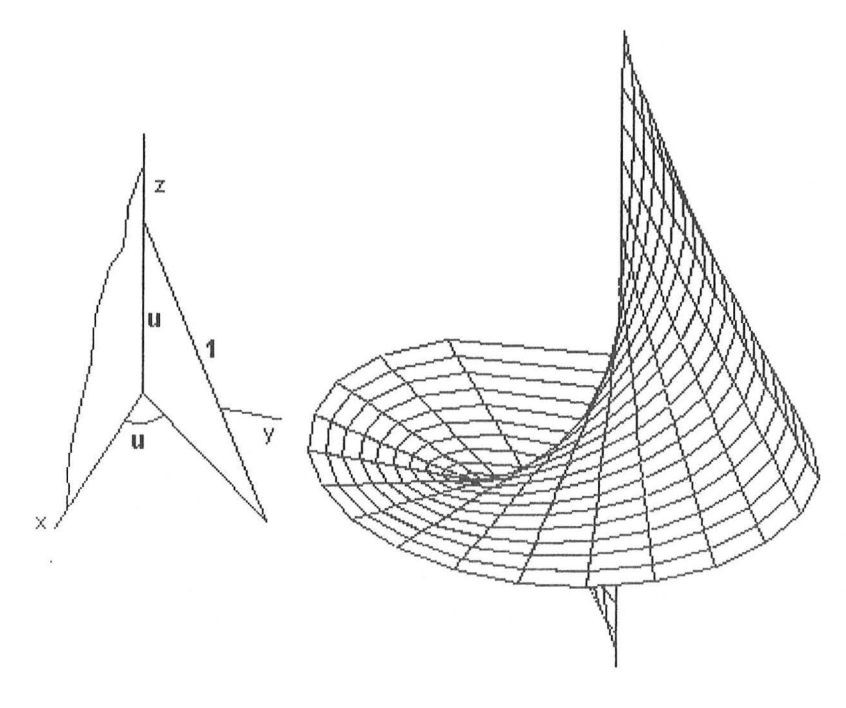
en función del ángulo "**u**" girado con respecto al plano **XOZ** por el plano que contiene al segmento y al eje.

La dirección de las rectas que contienen los segmentos generatrices serán por lo tanto:

$$\{ \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \; \cos u, \; \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \; \operatorname{sen} u, - u \}$$

con lo que la superficie podrá venir representada por la parametrización:

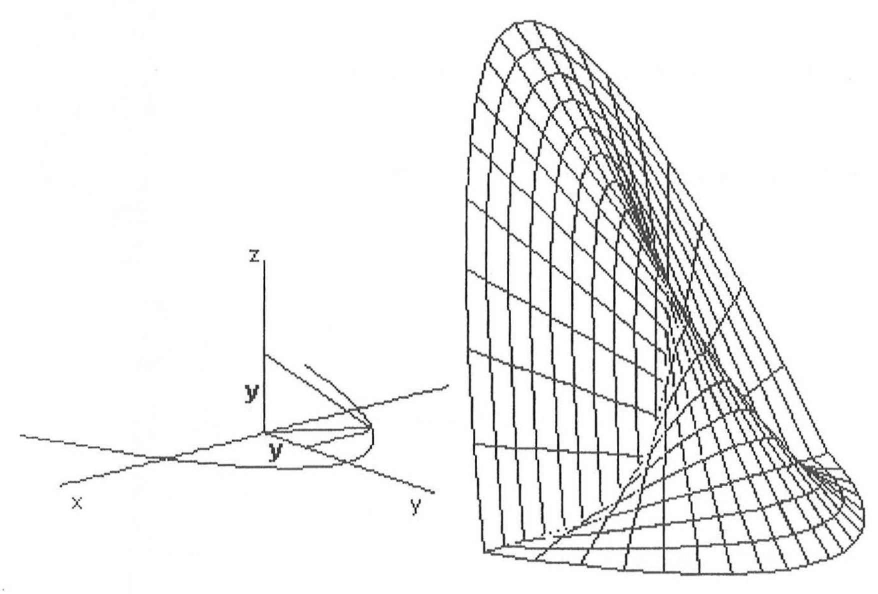
$$(0, 0, u) + v \{ \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \; \cos u, \; \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \; \operatorname{sen} u, - u \} = (v\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \; \cos u, \; v\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} \; \operatorname{sen} u, (1-v) \, u)$$



[La elección de la longitud del segmento limita la superficie al primer octante respecto del giro "**u**" aunque resulta ilimitada para el parámetro "**v**"]

E 18

Superficie generada por rectas que se apoyan simultáneamente en el eje **OZ** y en la parábola $z = 0$, $y = 1 - x^2$, de forma que la altura del punto de corte con tal eje – medida desde el origen – sea igual a la coordenada "**y**" del punto de apoyo sobre la parábola.



Las generatrices se apoyan en el eje **OZ**: $(0, 0, \lambda)$

y en la parábola $(u, 1-u^2, 0)$

debiendo verificar que $\lambda = 1 - u^2$ así que sus direcciónes vendrán definidas por:

$\{ u, 1-u^2, -\lambda \} = \{ u, 1-u^2, u^2-1 \}$

y la superficie podrá representarse por:

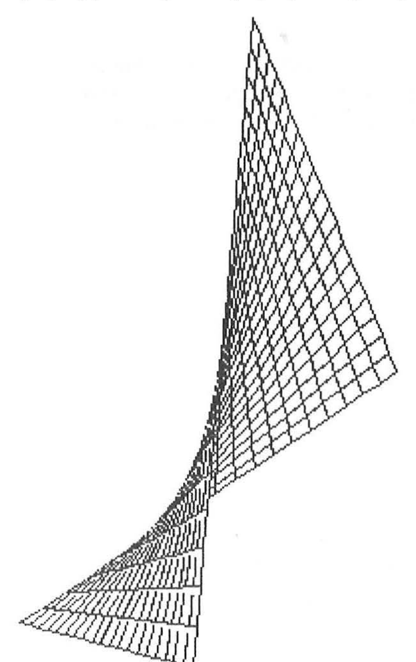
$$(0, 0, 1-u^2) + v \{ u, 1-u^2, u^2-1 \} = (v\,u, v\,(1-u^2), (1-v)\,(1-u^2))$$

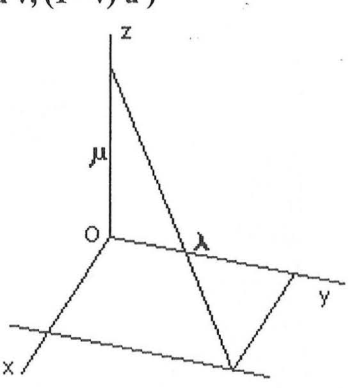
E19

Superficie generada en $z \geq 0$ por rectas que se apoyan en el eje **OZ** y en la recta $x = 2$, $z = 0$ de manera que la ordenada "**y**" en la recta horizontal sea igual a la altura "**z**" en el eje vertical.

Las directrices pueden escribirse $(2, \lambda, 0)$ y $(0, 0, \mu)$ de manera que $\lambda = \mu$. La dirección de las generatrices será la $\{2, \lambda, -\mu\}$ que puede ser escrita con $\lambda = \mu = u$ en la forma $\{2, u, -u\}$, así que la superficie podrá representarse por:

$$(2, \lambda = u, 0) + w\{2, u, -u\} = (2(1+w), u(1+w), -u\ w)$$
$$(0, 0, \mu = u) + v\{2, u, -u\} = (2v, u\,v, (1-v)\,u)$$

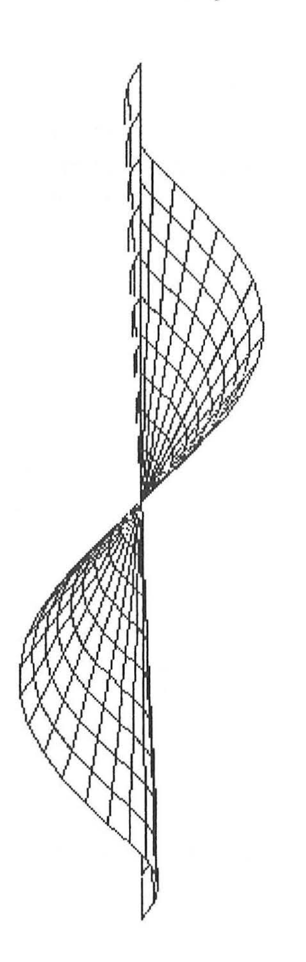




[Esta transición entre una directriz recta horizontal y otra vertical dentro de la superficie reglada es, finalmente, la gran aportación del paraboloide hiperbólico al diseño arquitectónico de superficies. Existen, de una u otra forma, multitud de ejemplos al respecto. Aquí, la transición se genera con un movimiento "helicoidal" de las generatrices. Los valores $z \geq 0 \rightarrow y \geq 0$ limitan la parte básica de la transición.
Esta "hoja alabeada", o sectores de ella, pueden acoplarse ahora de diferentes maneras por sus directrices o bordes formando figuras compuestas con una gran cantidad de combinaciones.]

E 20

Superficie generada por rectas que se apoyan en la curva $x = \cos z$, $y = \text{sen}\, z$ y la cortan en su intersección con el plano $x=1$.



La curva es la hélice circular $(\cos u, \text{sen}\, u, u)$ y corta al plano $x=1$ en $u = 0$, lo que determina el punto $(1, 0, 0)$.

Las generatrices unirán el punto genérico de $(\cos u, \text{sen}\, u, u)$ y el punto $(1, 0, 0)$ por lo que su dirección será la

$\{\cos u - 1, \text{sen}\, u, u\}$,

así que la superficie podrá representarse alternativamente por

$$(\cos u, \text{sen}\, u, u) + w\{\cos u - 1, \text{sen}\, u, u\} = ((1+w)\cos u - w, (1+w)\,\text{sen}\, u, (1+w)\ u)$$

tomando la hélice como directriz, o bien

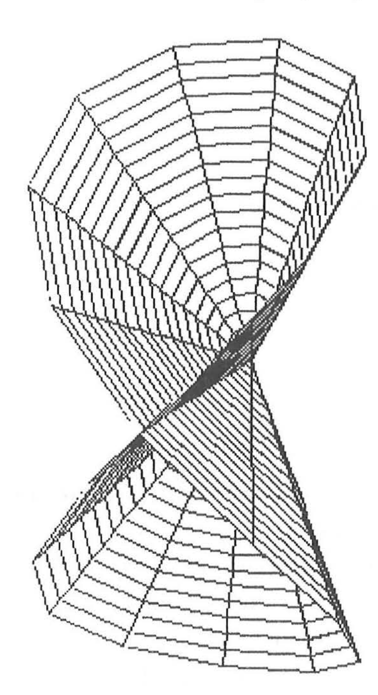
$$(1, 0, 0) + v\{\cos u - 1, \text{sen}\, u, u\} = (1 - v + v\cos u, v\,\text{sen}\, u, v\,u)$$

tomando el vértice como directriz.

Ambas parametrizaciones son, naturalmente, equivalentes. En este caso, bastará considerar el cambio $1+w = v$.

E21

Cono de vértice el origen y cuyas generatrices se apoyan en la curva de Viviani $(x-1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$.



La curva ha sido parametrizada en E9 con la representación

$$\left(1+\cos u, \operatorname{sen} u, 2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right)$$

Las generatrices se apoyan en la curva y en el punto $(0, 0, 0)$ por lo que tendrán la dirección $\{ 1+\cos u, \operatorname{sen} u, 2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \}$, así que la superficie podrá representarse por:

$$\left(1+\cos u, \operatorname{sen} u, 2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) + v \left\{ 1+\cos u, \operatorname{sen} u, 2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right\} =$$

$$= \left(v(1+\cos u), v \operatorname{sen} u, 2\, v \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right)$$

E 22

Cono de vértice el origen, eje **OZ** y semiángulo cónico **60°**.

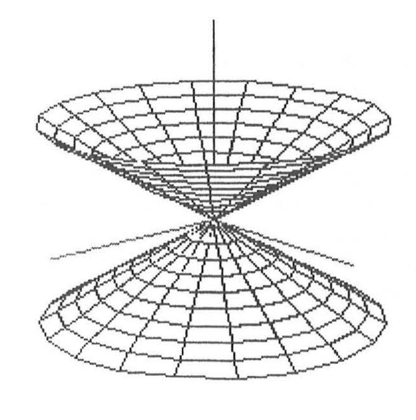
Puede encontrarse una curva directriz –además del vértice – obteniendo la ecuación de cualquier circunferencia en un plano perpendicular al eje **OZ** de manera que su radio forme con la altura sobre el eje el triángulo rectángulo correspondiente; por ejemplo el de lados **1**, $\frac{1}{2}(\cos 60^\circ)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{sen} 60^\circ)$; esta circunferencia tendrá por ecuaciones $x^2+y^2=\frac{3}{4}$, $z=\frac{1}{2}$ que puede representarse por $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos u, \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} u, \frac{1}{2}\right)$ y las generatrices se apoyarán en esta circunferencia y en el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$, por lo que su dirección será

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos u, \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} u, \frac{1}{2}\right\} = \{\sqrt{3}\cos u, \sqrt{3}\operatorname{sen} u, 1\}$$

pudiendo ahora representarse el cono tomando como directriz, indistintamente, la circunferencia o el vértice:

$$(0, 0, 0) + v\{\sqrt{3}\cos u, \sqrt{3}\operatorname{sen} u, 1\} = (\sqrt{3}\, v\cos u, \sqrt{3}\, v \operatorname{sen} u, v)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos u, \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} u, \frac{1}{2}\right) + v\{\sqrt{3}\cos u, \sqrt{3}\operatorname{sen} u, 1\} = \left(\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+v\right)\cos u, \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+v\right)\operatorname{sen} u, \left(\frac{1}{2}+v\right)\right)$$



[Con mayor generalidad, la circunferencia directriz puede obtenerse como intersección de cualquier esfera de centro el origen de coordenadas y radio R arbitrario : $x^2+y^2+z^2=R^2$ con el plano horizontal: $z = R\cos 60^\circ = R/2$; esta intersección satisface las relaciones $x^2+y^2=3R^2/4$, $z=R/2$, así que puede parametrizarse en la forma $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}R\operatorname{sen}\theta, \frac{R}{2}\right)$ y la dirección de las generatrices podrá escribirse:
$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}R\operatorname{sen}\theta, \frac{R}{2}\right\}$, con $R \neq 0$ equivalwente a $\{\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, 1\}$]

Alternativamente, puede comprobarse que siendo la dirección del eje **OZ** la **{ 0, 0, 1 }**, podemos tomar como dirección de las generatrices la **{ α, β, 1 }**, de manera que ha de verificarse:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2+\beta^2+1=4 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2+\beta^2=3$$

y haciendo $\alpha = \sqrt{3}\cos u$, $\beta = \sqrt{3}\,\text{sen}\, u$, la dirección de las generatrices podrá expresarse por:

$\{\sqrt{3}\cos u,\ \sqrt{3}\,\text{sen}\, u, 1\}$

E 23
Cono de vértice el origen, eje **x = z , y = 0** y semiángulo cónico **45°**.

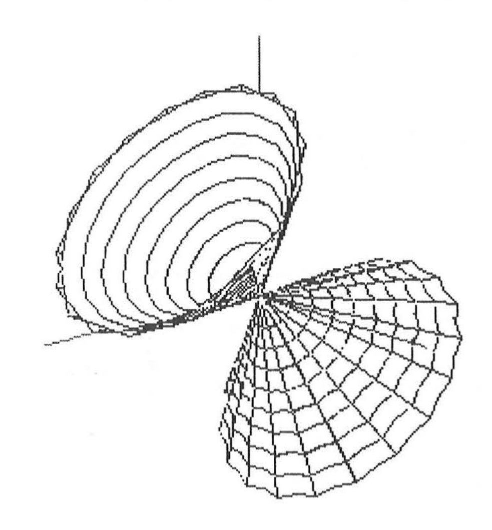
Se puede buscar como circunferencia directriz cualquiera en un plano normal al eje que se apoye en los ejes **OX** y **OY** (semiángulo cónico 45°). La esfera con centro el origen y radio unidad – por ejemplo – podrá escribirse $x^2+y^2+z^2 = 1$. Pueden tomarse ahora dos puntos cualesquiera del eje del cono; por ejemplo los **(0, 0, 0)** y **(1, 0, 1)**, con lo que su dirección será la **{ 1, 0, 1 }**, así que los planos normales al eje tendrán por ecuación: **x + z + D = 0**, y de ellos, el que pasa por el punto **(1, 0, 0)** será, con **D = –1**, el **x + z –1 = 0**.
La intersección de la esfera y plano satisface **z = 1 – x** y también $x^2+y^2+1-2x+x^2=1 \rightarrow y^2 = 2x(1-x)$, así que podrá representarse por la parametrización:

$(\cos^2 u,\ \sqrt{2}\,\text{sen}\, u \cos u,\ \text{sen}^2 u)$.

[De forma más general puede obtenerse una circunferencia del cono hallando la intersección de una esfera de radio **R** con centro en el vértice que en este caso es el origen de coordenadas: $x^2+y^2+z^2 = R^2$, y el plano perpendicular a la dirección **{ 1, 0, 1 }** a distancia del origen $R\cos 45^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}}$, o sea, el plano: **x + z – R = 0**. Una parametrización de la curva resultante es $(R\,\text{sen}^2\theta,\ \sqrt{2}\,R\,\text{sen}\,\theta\cos\theta,\ R\cos^2\theta)$]

Las generatrices se apoyan ahora en **(0, 0, 0)** y en la circunferencia $(\cos^2 u,\ \sqrt{2}\,\text{sen}\, u\cos u,\ \text{sen}^2 u)$ por lo que su dirección será la $\{\cos^2 u,\ \sqrt{2}\,\text{sen}\, u\cos u,\ \text{sen}^2 u\}$ y la superficie puede representarse tomando, indistintamente, la circunferencia o el vértice como directriz:

$(\cos^2 u,\ \sqrt{2}\,\text{sen}\, u\cos u,\ \text{sen}^2 u) + w\,\{\cos^2 u,\ \sqrt{2}\,\text{sen}\, u\cos u,\ \text{sen}^2 u\} =$
$= ((1+w)\cos^2 u,\ \sqrt{2}\,(1+w)\,\text{sen}\, u\cos u,\ (1+w)\,\text{sen}^2 u)$
$(0, 0, 0) + v\,\{\cos^2 u,\ \sqrt{2}\,\text{sen}\, u\cos u,\ \text{sen}^2 u\} = (v\cos^2 u,\ \sqrt{2}\,v\,\text{sen}\, u\cos u,\ v\,\text{sen}^2 u)$.



[Siendo **{ 1, 0, 1 }** la dirección del eje y tomando como dirección de las generatrices la **{ α, β, 1 }**, ambas direcciones deberán satisfacer:

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha+1}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2+\beta^2+1 = \alpha^2+1+2\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = 2\alpha$$

al hacer por ejemplo $\alpha = 2\theta^2 \rightarrow \beta = \pm 2\theta$, disponemos de la dirección de las generatrices en la forma $\{2\theta^2, \pm 2\theta, 1\}$; ambos resultados determinan la misma superficie con el vértice como directriz: $(2v\theta^2, \pm 2v\theta, v)$ que, en efecto, es una parametrización de la ecuación del cono buscado $y^2 = 2xz$, pero obsérvese que es una parametrización que cubre solamente una parte de tal cono – basta comprobar que no incluye el eje **OX**, por ejemplo, que debe ser una generatriz del mismo–. Sería necesario completar la otra mitad a partir de generatrices con la forma genérica **{ 1, β, γ }**, por ejemplo, y trabajar con ambas parametrizaciones para cubrir el cono en su integridad. Por situaciones semejantes es por lo que es preferible generar el cono con dos directrices asegurándose de que la parametrización cubre la circunferencia en su integridad.]

E24

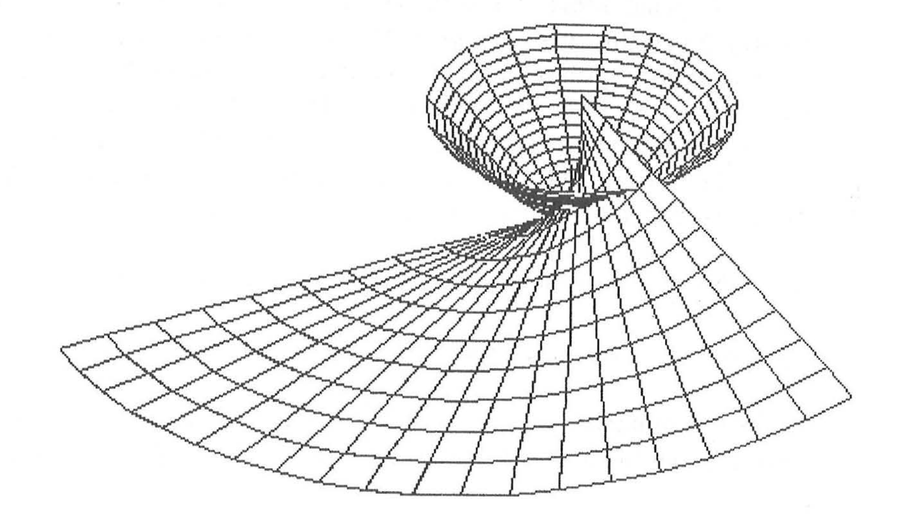
Superficie generada por rectas que se apoyan en la hélice cónica $(e^u \cos u, e^u \operatorname{sen} u, e^u)$, $u \in [0, 2\pi]$ y en el eje **OZ** permaneciendo paralelas al plano **XOY**.

Las dos directrices pueden representarse por:

$(0, 0, \lambda)$ y $(e^u \cos u, e^u \operatorname{sen} u, e^u)$,

así que las generatrices tendrán la dirección:

$\{ e^u \cos u, e^u \operatorname{sen} u, e^u - \lambda \}$



y deberán ser paralelas al plano director **z=0** y por lo tanto normales a su vector característico $\{ 0, 0, 1 \}$, por lo que deberán satisfacer:

$\{ e^u \cos u, e^u \operatorname{sen} u, e^u - \lambda \} \{ 0, 0, 1\} = 0$

de donde obtenemos la relación $\lambda = e^u$;

las direcciones de las generatrices quedarán representadas por:

$\{ e^u \cos u, e^u \operatorname{sen} u, 0 \} \equiv \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \}$

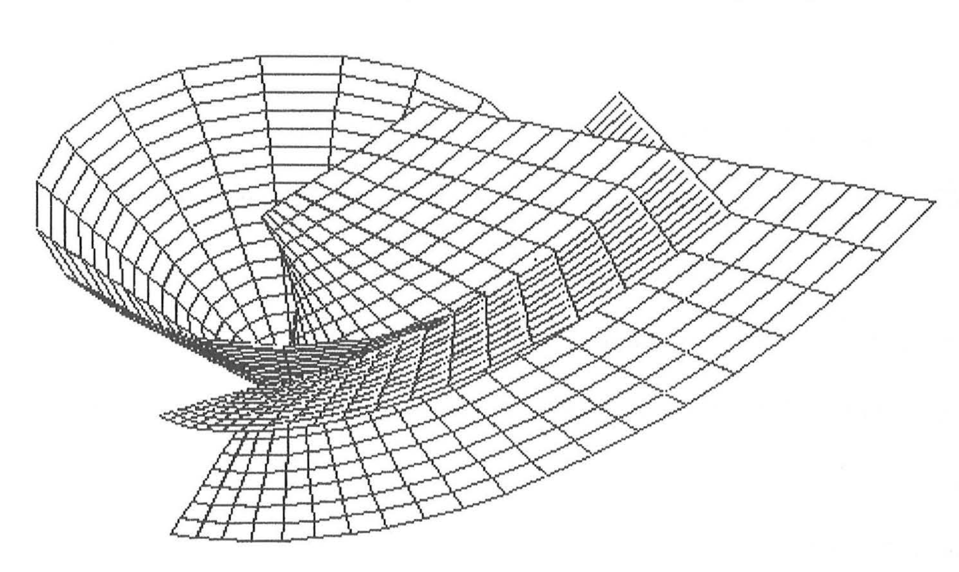
pudiendo la superficie representarse por:

$(e^u \cos u, e^u \operatorname{sen} u, e^u) + w \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \} = ((e^u + w) \cos u, (e^u + w) \operatorname{sen} u, e^u)$

o bien por la parametrización equivalente:

$(0, 0, \lambda = e^u) + v \{ \cos u, \operatorname{sen} u, 0 \} = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, e^u)$.

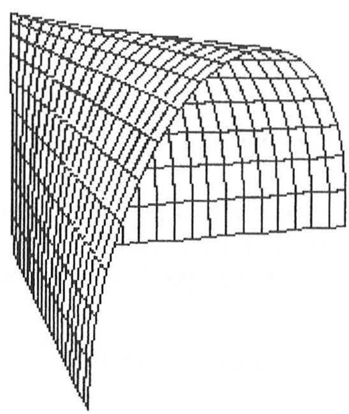
[En E8 se generó la superficie de las normales principales – horizontales– de la hélice. En la figura siguiente se compara una hoja de normales principales y otra de generatrices horizontales que se apoyan en la hélice y en el eje **OZ**.]



E25

Superficie generada por rectas horizontales que se apoyan en el eje **OZ** y en la circunferencia contenida en el plano **y = 2** con centro en el eje **OY** y radio **2**.

[Las variantes de este conoide son conocidas como "cuñas de Wallis"; el eje **OZ** es normal al plano director y se trata, por lo tanto, de un conoide recto]



El plano director del conoide es el **z = 0** cuya normal es la recta de dirección **{ 0, 0, 1 }**. Una directriz es el eje **OZ** que puede parametrizarse por **(0, 0, λ)**. La segunda directriz propia será una circunferencia de radio **2** con centro en la intersección del plano **y = 2** con el eje **OY**: **x=0 , z=0**, que es el punto **(0, 2, 0)**. La circunferencia será la intersección de la esfera $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ con el plano **y = 2** que es, trivialmente, la circunferencia $x^2 + z^2 = 4$, **y = 2** y que puede parametrizarse por **(2 cos u, 2, 2 sen u)**.



La dirección de las generatrices que se apoyan en las curvas

(0, 0, λ) y **(2 cos u, 2, 2 sen u)**

vendrá determinada por el vector **{ 2 cos u, 2, 2 sen u – λ }** que deberá ser normal al **{ 0, 0, 1 }**, por lo que **λ = 2 sen u** y la dirección de las generatrices podrá representarse por

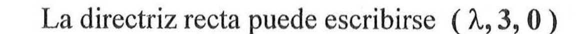
{ 2 cos u, 2, 0 } ≡ { cos u, 1, 0 },

así que la superficie puede ser parametrizada, en la forma más sencilla, por las parametrizaciones:

(2 cos u, 2, 2 sen u) + w { cos u, 1, 0 } = ((2+w) cos u, 2+w, 2 sen u)
(0, 0, λ= 2 sen u) + v { cos u, 1, 0 }= (v cos u, v, 2 sen u)

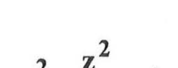
E26

Superficie generada por rectas paralelas al plano **x = 0** y que se apoyan en la recta **y= 3 , z = 0** y en la curva $9x^2+z^2-9 = 0$, **y = 0**.



La directriz recta puede escribirse **(λ, 3, 0)**

La directriz curva es la elipse en el plano **XOZ**:



$$x^2 + \frac{z^2}{9} = 1 ,$$

que podemos parametrizar por **(cos u, 0, 3 sen u)**.

Las generatrices que se apoyan en ambas líneas tienen por dirección

{ cos u – λ, – 3, 3 sen u }

que deberán ser ortogonales al vector característico del plano **x = 0 : {1, 0, 0}**.

De la condición de ortogonalidad se deduce que **λ = cos u**, con lo que la dirección de las generatrices resulta ser:

{ 0, – 3, 3 sen u } = { 0, 1, – sen u }

y la superficie pude representarse por:

(cos u, 0, 3 sen u) + w { 0, 1, – sen u } = (cos u, w, (3 – w) sen u)
(λ = cos u, 3, 0) + v { 0, 1, – sen u } = (cos u, 3 + v, – v sen u)

E27 y E28

Superficies generadas, en $0 \le z \le 2$, $y \ge 0$, por rectas que cortan a la curva $y^3 = x^2$, $z = 0$ en los siguientes casos:

a) Se apoyan, además, en la recta $z = 2$, $y = 0$ permaneciendo paralelas al plano **YOZ**.

b) Se apoyan, además, en la recta $x = 0$, $z = 2$ permaneciendo en planos $y = c = cte$.

La directriz común puede escribirse $(u^3, u^2, 0)$.

En el caso a), la segunda directriz será la $(\lambda, 0, 2)$ y la dirección de las generatrices

$\{\lambda - u^3, -u^2, 2\}$

que deberá ser normal al vector característico del plano director $\{1, 0, 0\}$, por lo que:

$\{\lambda - u^3, -u^2, 2\}\{1, 0, 0\} = 0$,

de donde $\lambda = u^3$, así que la dirección podrá escribirse en función de "u" en la forma $\{0, -u^2, 2\}$, y la superficie podrá representarse por:

$(u^3, u^2, 0) + w\{0, -u^2, 2\} = (u^3, (1-w)\,u^2, 2w)$

$(\lambda = u^3, 0, 2) + v\{0, -u^2, 2\} = (u^3, -v\,u^2, 2(1+v))$

En el caso b), la segunda directriz será la $(0, \mu, 2)$ y la dirección de las generatrices la $\{u^3, u^2 - \mu, -2\}$ que deberán ser normales al vector característico del plano director $\{0, 1, 0\}$, por lo que:

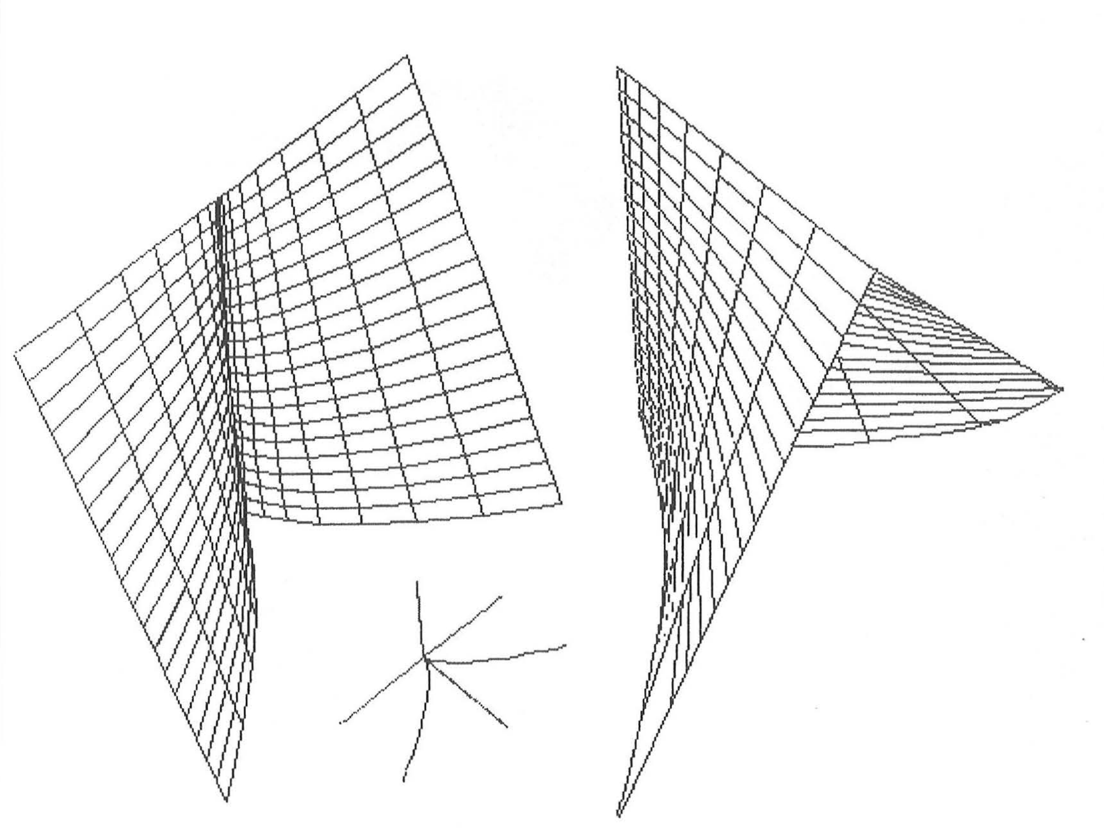
$\{u^3, u^2 - \mu, -2\}\{0, 1, 0\} = 0$,

de donde $\mu = u^2$ y la dirección puede escribirse $\{u^3, 0, -2\}$;

así que la superficie podrá representarse por:

$(u^3, u^2, 0) + w\{u^3, 0, -2\} = ((1+w)\,u^3, u^2, -2w)$

$(0, \mu = u^2, 2) + v\{u^3, 0, -2\} = (v\,u^3, u^2, 2(1-v))$



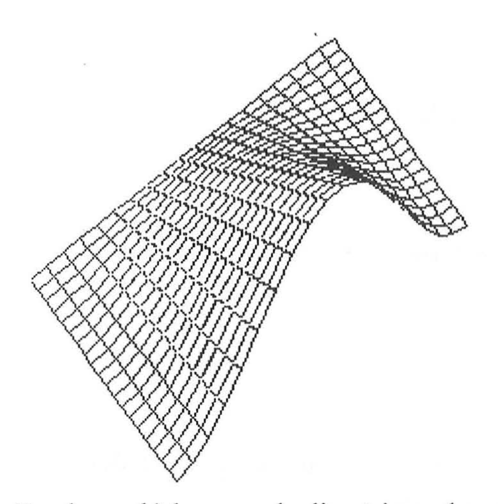
[La limitación $0 \le z \le 2$, $y \ge 0$ afecta a la región del intervalo de los parámetros, particularmente al parámetro lineal **w** ó **v**. Eligiendo las representaciones en **u,v**:
en el caso a) :
$-1 \le v \le 0$
y en el caso b) :
$0 \le v \le 1$.
Ambas representaciones paramétricas son las representadas en las figuras.]

E29 y E30

Superficies generadas por rectas que parmaneciendo paralelas al plano **x = 0** se apoyan en el eje **OX** en los siguientes casos:

a) Las generatrices se apoyan, además, en la curva **y = 3 , z = 2 cos x**
b) Las generatrices se apoyan, además, en la curva **y = 2 , z = 3 – ch x**

La dirección normal al plano director de los conoides es la **{ 1, 0, 0 }**. Ambos tienen la directriz **(λ, 0, 0)**.



En el caso a) la segunda directriz es la **(u, 3, 2 cos u)** así que las generatrices tienen la dirección:

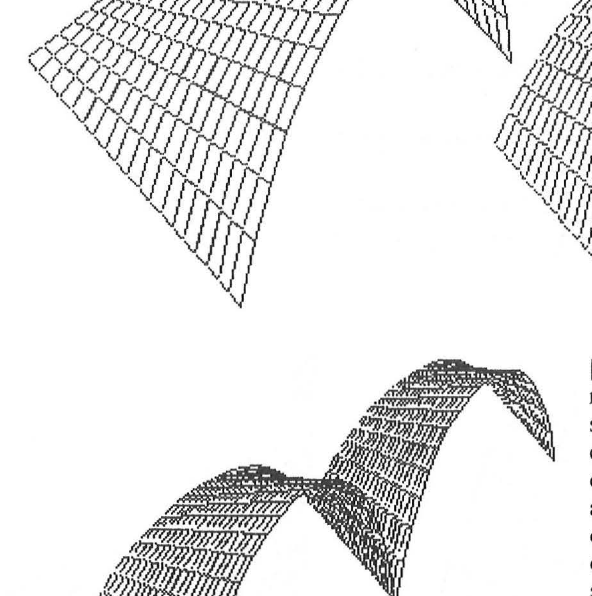
{ λ–u, –3, – 2 cos u }

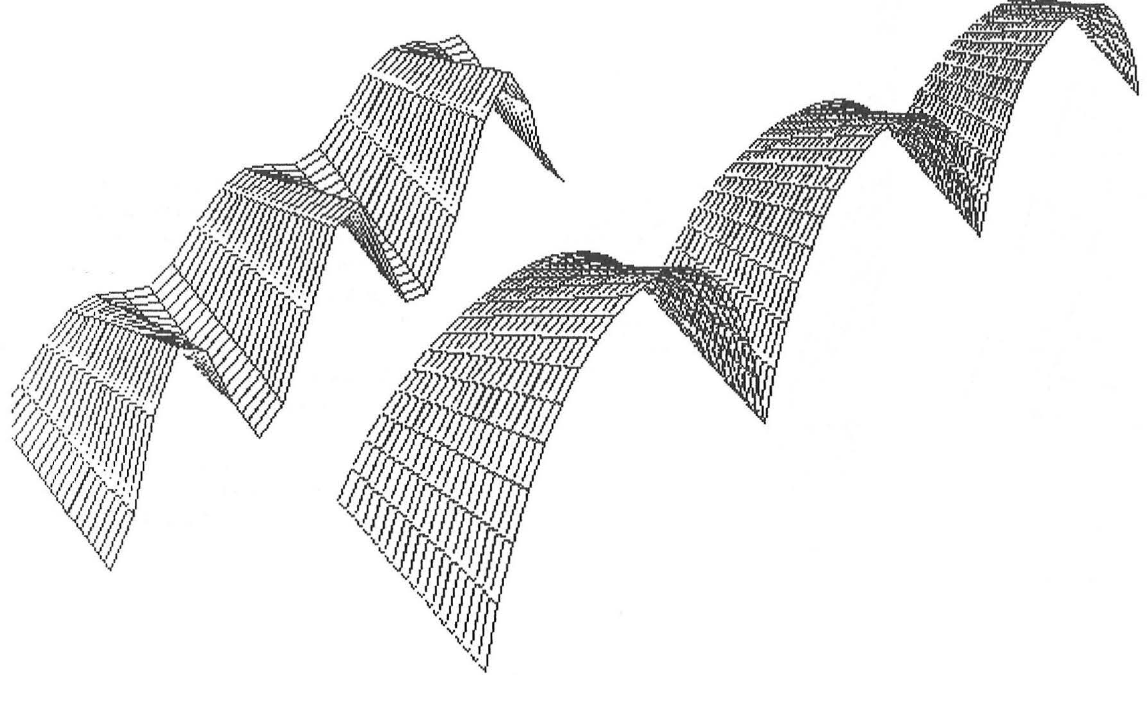
que, por ser ortogonales a la **{ 1, 0, 0 }** deberá ser la **{ 0, – 3, – 2 cos u }** con lo que la superficie podrá escribirse:

(u, 3, 2 cos u) + w { 0, – 3, – 2 cos u } = (u, 3 (1– w), 2 (1 – w) cos u }
(λ=u, 0, 0) + v { 0, – 3, – 2 cos u } = (u, –3 v, – 2 v cos u)

En el caso b) la segunda directriz es la **(u, 2, 3 – ch u)**, así que las generatrices tienen la dirección **{ λ – u, – 2, ch u – 3 }** que , por ser ortogonales a la **{ 1, 0, 0 }**, deberá ser **{ 0, – 2, ch u –3 }**, por lo que la superficie podrá escribirse:

(u, 2, 3 – ch u) + w { 0, – 2, ch u –3 } =
= (u, 2 (1– w), (w –1) (ch u – 3) }
(λ = u, 0, 0) + v { 0, – 2, ch u –3 } =
= (u, – 2 v, v (ch u – 3))





[Diferentes regiones de modelos conoidales semejantes se han ensayado como cubiertas de doble curvatura alternativas a las desarrollables cilíndricas o cónicas. En el caso b), un sector del conoide en el que la sección transversal media es una catenaria, pretende aprovechar las cualidades elastico-resistentes de esta curva en lo referente, por ejemplo, a su línea de presiones. Una alternativa a la catenaria es la parábola, con otras propiedades semejantes bien conocidas. Para pequeñas curvaturas y en determinadas condiciones la parábola difiere poco, formalmente, de la catenaria.]

E31

Superficie generada por rectas que se conservan en planos paralelos al **YOZ** y se apoyan en la circunferencia $\mathbf{x^2+z^2 = 4}$, $\mathbf{y = 0}$ y en la recta $\mathbf{y = 2}$, $\mathbf{z = 2}$.

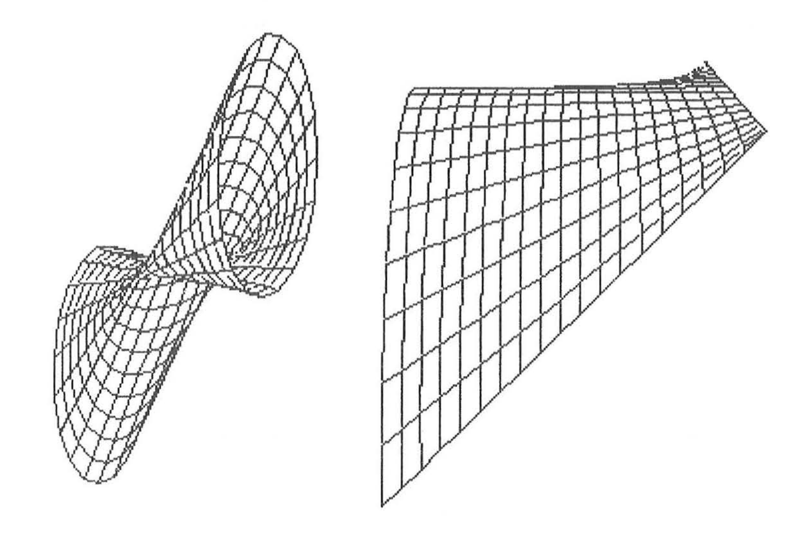
Las directrices pueden escribirse

$\mathbf{(\,2\cos u, 0, 2\,\text{sen}\, u\,)}$, $\mathbf{(\,\lambda, 2, 2\,)}$

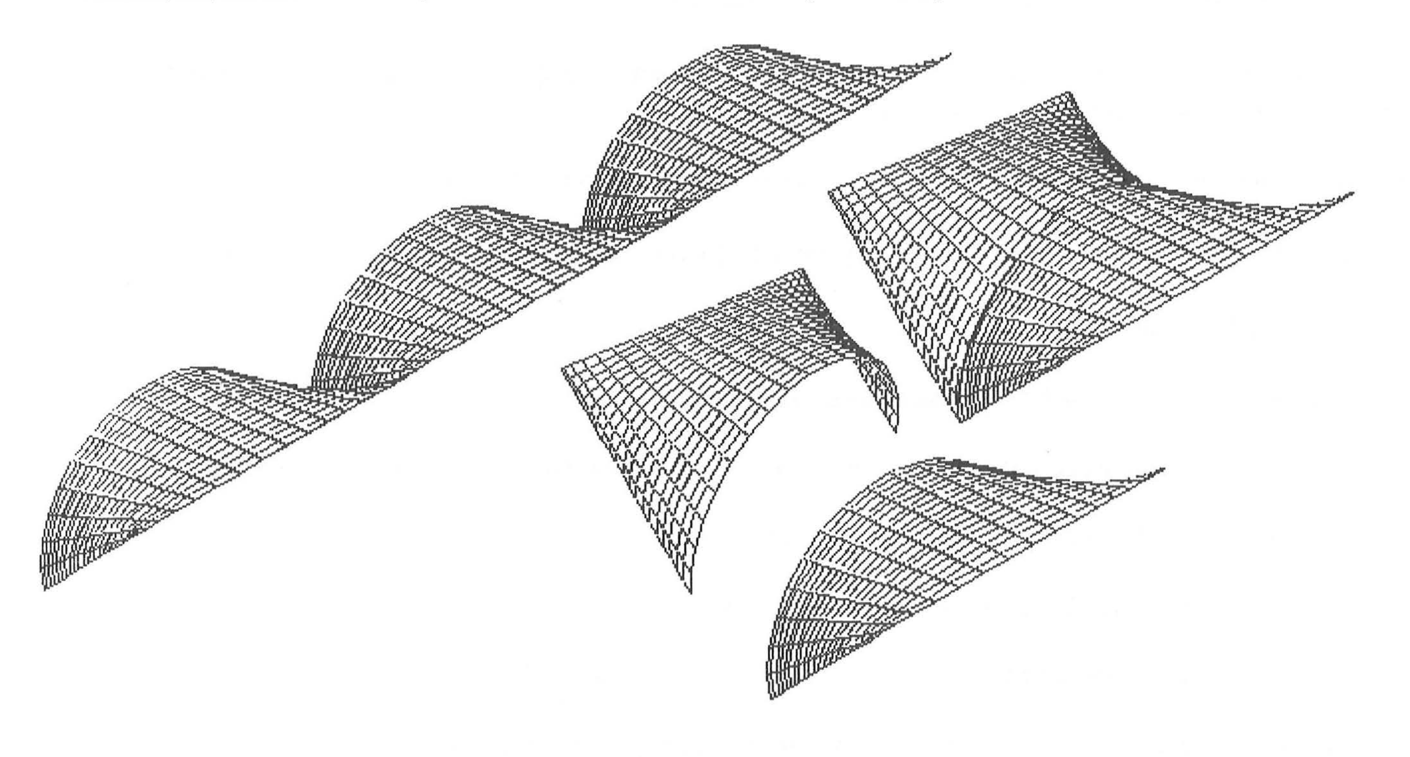
La dirección de las generatrices $\mathbf{\{\,\lambda - 2\cos u, 2, 2 - 2\,\text{sen}\,u\,\}}$ debe satisfacer la condición de ortogonalidad con la $\mathbf{\{\,1, 0, 0\,\}}$ por lo que $\mathbf{\lambda = 2\cos u}$ y se convierte en la $\mathbf{\{\,0, 2, 2{-}2\,\text{sen}\,u\,\} \equiv \{\,0, 1, 1 - \text{sen}\,u\,\}}$

así que la superficie puede escribirse:

$\mathbf{(\,2\cos u, 0, 2\,\text{sen}\,u\,) + v\,\{\,0, 1, 1 - \text{sen}\,u\,\} = (\,2\cos u, v, v + (\,2 - v\,)\,\text{sen}\,u\,)}$
$\mathbf{(\,\lambda = 2\cos u, 2, 2\,) + w\,\{\,0, 1, 1 - \text{sen}\,u\,\} = (\,2\cos u, 2 + w,\ 2 + w\,(\,1 - \text{sen}\,u\,)\,)}$



[Regiones o agrupaciones de esta variante de "cuña", cuya directriz curvilínea puede ser, alternativamente, un arco de elipse, de parábola, catenaria, etc., han sido también ampliamente utilizadas como elementos arquitectónicos.]



E32

Superficie generada por rectas que se apoyan en el eje **OZ** y en la curva intersección del cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$ con el plano $x - z - 1 = 0$ permaneciendo paralelas al plano normal al eje del cilindro.

[El conoide que tiene por directrices una elipse contenida en un cilindro de revolución y una generatriz rectilínea del cilindro que pasa por el extremo del eje mayor de la elipse, teniendo como plano director el perpendicular al eje del cilindro se conoce como "conoide de Plücker".]

El plano normal al eje del cilindro, que es el **XOY** es el plano director del conoide. La directriz curva es la elipse intersección de las superficies $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $x - z - 1 = 0$. Haciendo $x = 1 + \cos u$ e $y = \operatorname{sen} u$, con lo que $z = x - 1 = \cos u$, resulta la parametrización:

$(1 + \cos u, \operatorname{sen} u, \cos u)$.

Las generatrices se apoyan, por lo tanto, en las curvas:

$(0, 0, \lambda)$ y $(1 + \cos u, \operatorname{sen} u, \cos u)$

así que sus direcciones serán $\{1 + \cos u, \operatorname{sen} u, \cos u - \lambda\}$

que deberán ser normales al vector $\{0, 0, 1\}$, por lo que se convierten en $\{1 + \cos u, \operatorname{sen} u, 0\}$

y la superficie puede representarse por:

$(1 + \cos u, \operatorname{sen} u, \cos u) + w\ \{1 + \cos u, \operatorname{sen} u, 0\} = ((1 + w)(1 + \cos u), (1 + w) \operatorname{sen} u, \cos u)$

$(0, 0, \lambda = \cos u) + v\ \{1 + \cos u, \operatorname{sen} u, 0\} = (v(1 + \cos u), v \operatorname{sen} u, \cos u)$

E33

Superficie generada por rectas que se apoyan en el eje **OZ**, son paralelas al plano **XOY** y permanecen tangentes a la esfera $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Las generatrices se apoyan en el eje **OZ**: $(0, 0, \lambda)$ y en la esfera

$\underline{r}(\phi, u) = (1 + \cos\phi \cos u, \cos\phi \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}\phi)$ (coordenadas esféricas)

Asi que las direcciónes de las generatrices $\{1 + \cos\phi \cos u, \cos\phi \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}\phi - \lambda\}$ perpendiculares a $\{0, 0, 1\}$ se convierten, con $\lambda = \operatorname{sen}\phi$, en las $\{1 + \cos\phi \cos u, \cos\phi \operatorname{sen} u, 0\}$

Estas direcciónes deberá ser normal a las normales a la esfera que tienen por dirección:

$\underline{r}_\phi \times \underline{r}_u = \{-\cos^2\phi \cos u, -\cos^2\phi \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen}\phi \cos\phi\} \equiv \{\cos\phi \cos u, \cos\phi \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}\phi\}$, $\cos\phi \neq 0$

por lo que se deberán satisfacer:

$\{\cos\phi \cos u, \cos\phi \operatorname{sen} u, \operatorname{sen}\phi\}\ \{1 + \cos\phi \cos u, \cos\phi \operatorname{sen} u, 0\} = 0$

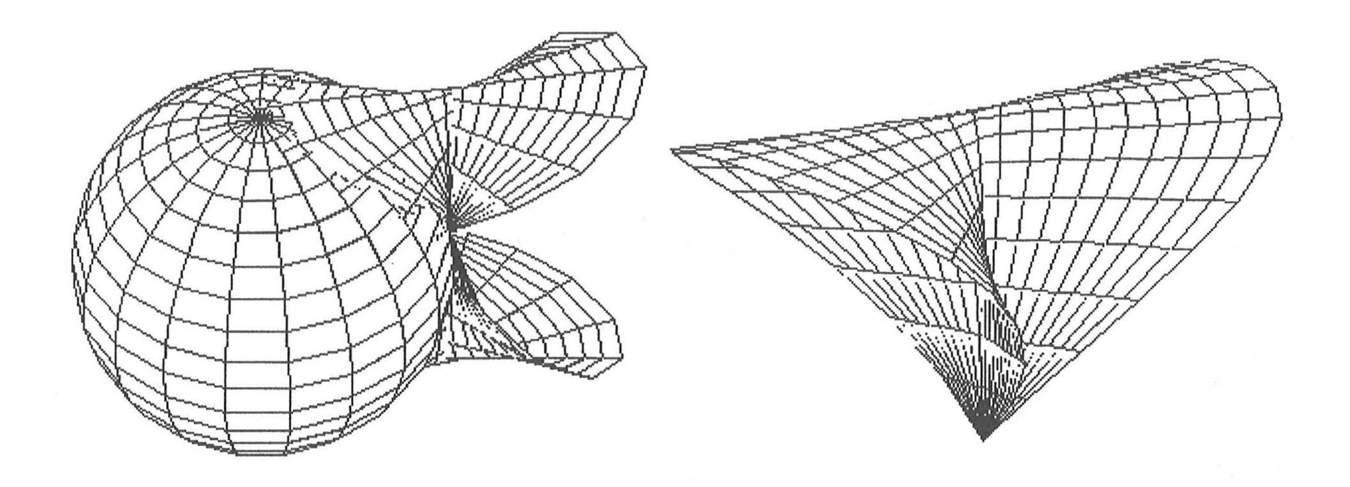
de donde obtenemos, con $\cos\phi \neq 0$, la condición: $\cos u + \cos\phi = 0 \rightarrow \cos u = -\cos\phi$, $\operatorname{sen} u = \operatorname{sen}\phi$

así que las direcciónes de las generatrices adoptan, finalmente, la forma:

$\{1 - \cos^2 u, -\operatorname{sen} u \cos u, 0\} = \{\operatorname{sen}^2 u, -\operatorname{sen} u \cos u, 0\}$

y la superficie podrá representarse por:

$(0, 0, \operatorname{sen} u) + v\ \{\operatorname{sen}^2 u, -\operatorname{sen} u \cos u, 0\} = (v \operatorname{sen}^2 u, -v \operatorname{sen} u \cos u, \operatorname{sen} u)$



[El contorno aparente puede representrse substituyendo **cos** ϕ **= – cos u** y **sen** ϕ **= sen u** en la ecuación de la esfera, obteniendo la curva **(sen^2 u, – sen u cos u, sen u)** y, tomándola como directriz, obtener la superficie buscada en la forma:
(sen^2 u, – sen u cos u, sen u) + w **{ sen^2 u, – sen u cos u, 0 } = ((1+ w) sen^2 u, – (1+ w) sen u cos u, sen u)**.]

E34

Superficie generada por rectas paralelas al plano **x = 0** y que se apoyan en las líneas :

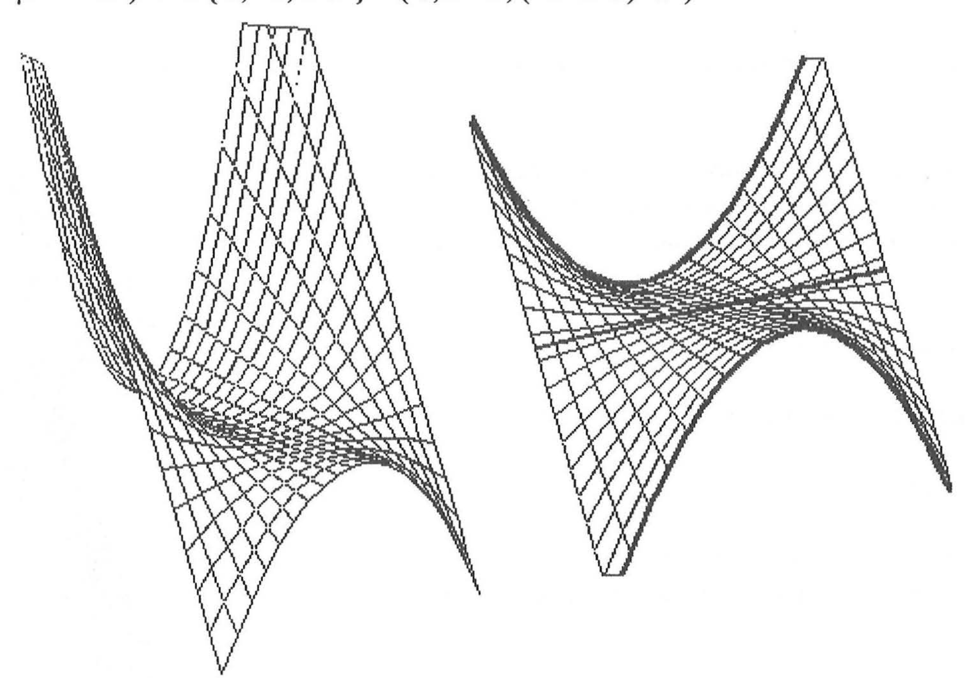
$y = 1 \ , \ z = x^2 \qquad ; \qquad y = 2 \ , \ z = -x^2$

La superficie es un cilindroide. Las directrices podrán escribirse: $(\lambda, 1, \lambda^2)$ y $(\mu, 2, -\mu^2)$, que son dos parábolas en planos **y =1** e **y = 2** respectivamente. La dirección de las generatrices será la $\{\lambda-\mu, -1, \lambda^2+\mu^2\}$ que deberán ser normales a la $\{1, 0, 0\}$, así que $\lambda = \mu = u$, con lo que estas direcciones podrán escribirse

$\{0, -1, 2u^2\}$

y la superficie podrá representarse por:

$(\lambda = u, 1, \lambda^2 = u^2) + v\{0, -1, 2u^2\} = (u, 1-v, (1+2v)u^2)$
$(\mu = u, 2, -\mu^2 = -u^2) + w\{0, -1, 2u^2\} = (u, 2-w, (-1+2w)u^2)$



[Comprobamos que, tomando por ejemplo la representación con los parámetros **u** y **v**, la superficie corta al plano **XOY** en la recta $y = \frac{3}{2}$, $z = 0$ ($v = -\frac{1}{2}$ en la superficie). Las generatrices cortan a esta recta, por lo que esta superficie puede construirse también como un axoide, generado por rectas que se apoyan en las dos directrices curvas y en una recta horizontal, y si se hace así, aparte de otras posibles soluciones, las generatrices resultarán ser paralelas al plano **YOZ** . Esta otra manera de generar esta misma superficie se realiza en E39]

E35

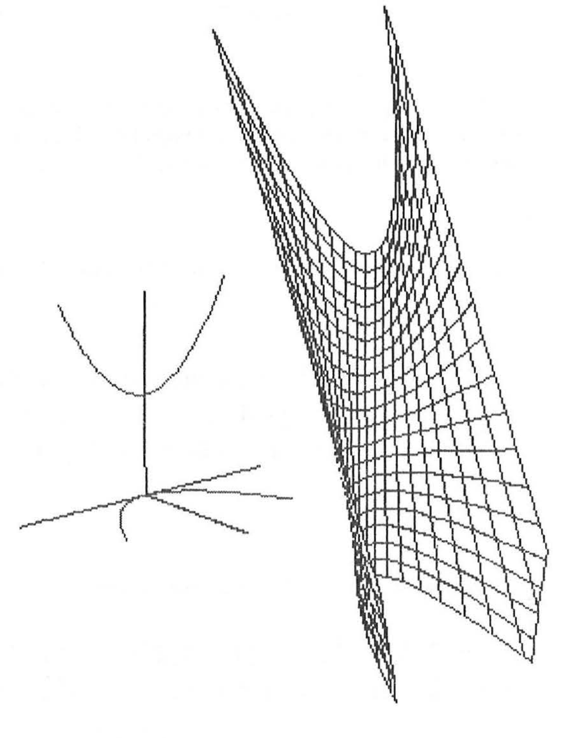
Superficie generada por rectas paralelas al plano **YOZ** que se apoyan en las curvas:
$z = x^2+1$, $y = 0$; $y = x^2$, $z = 0$

Las dos directrices curvas se pueden escribir $(\lambda, 0\ \lambda^2+1)$ y $(\mu, \mu^2, 0)$, así que la dirección de las generatrices será la del vector $\{\lambda - \mu, -\mu^2, \lambda^2+1\}$ que por ser normales al vector $\{1, 0, 0\}$ verificarán

$\lambda = \mu = u$

y podrán escribirse en la forma $\{0, -u^2, u^2+1\}$, con lo que la superficie podrá representarse por:

$(u, 0, u^2+1) + v\ \{0, -u^2, u^2+1\} = (u, -v\,u^2, (1+v)(u^2+1))$
$(u, u^2, 0) + w\ \{0, -u^2, u^2+1\} = (u, (1-w)\,u^2, w\,(u^2+1))$



E36

Lugar geométrico de las rectas que cortan a la: $x = 0$, $z = 0$ y a la: $x = 1$, $y = 1$, permaneciendo paralelas al plano $x - y + z = 0$.

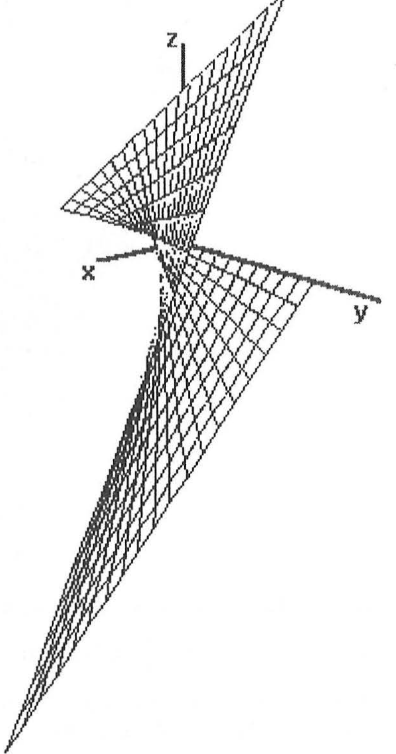
Las dos directrices rectas se pueden escribir $(0, \lambda, 0)$ y $(1, 1, \mu)$, así que la dirección de las generatrices será la del vector $\{1, 1-\lambda, \mu\}$, que por ser normal al vector característico del plano director $\{1, -1, 1\}$ verificará:

$1-1+\lambda+\mu = 0$ de donde $\lambda = -\mu = u$

La dirección de las generatrices será ahora $\{1, 1-u, -u\}$

y la superficie podrá representarse por:

$(0, u, 0) + v\ \{1, 1-u, -u\} = (v, u+v-u\,v, -u\,v)$
$(1, 1, -u) + w\ \{1, 1-u, -u\} = (1+w, 1+w-u\,w, (1-w)\,u)$



E37

Superficie generada por rectas que se apoyan en las parábolas:

$y = 0 \; , \; z = 2 - \frac{1}{8}x^2 \quad ; \quad y = 4 \; , \; z = 2 - 2\,x^2$

y permanecen paralelas al plano **XOY**.

Las directrices pueden escribirse: $(\lambda, 0, 2 - \frac{1}{8}\lambda^2)$, $(\mu, 4, 2 - 2\,\mu^2)$ y la dirección de las generatrices será la del vector $\{\lambda - \mu, -4, 2\,\mu^2 - \frac{1}{8}\lambda^2\}$, que deberá ser ortogonal al $\{0, 0, 1\}$, por lo que habrá de verificarse

$2\,\mu^2 = \frac{1}{8}\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 4\,\mu$

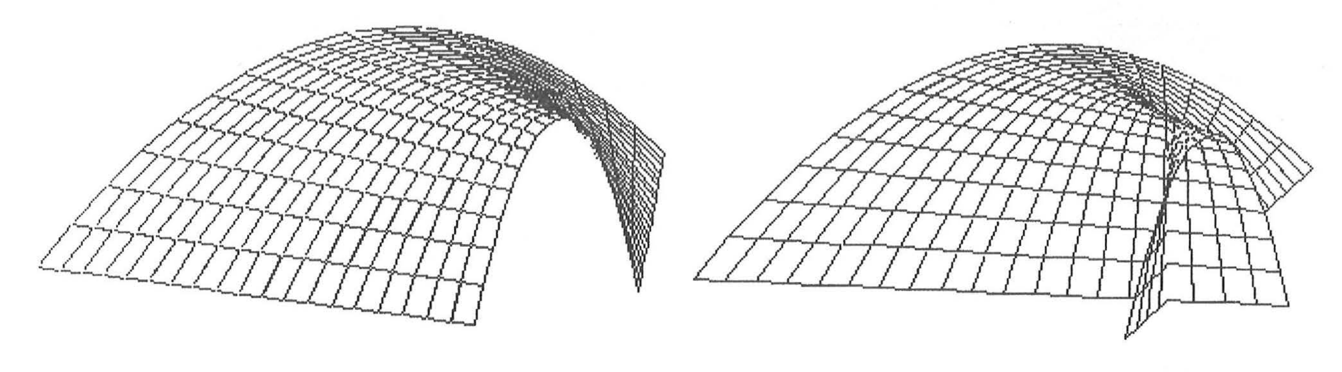
Se generan por lo tanto dos cilindroides:

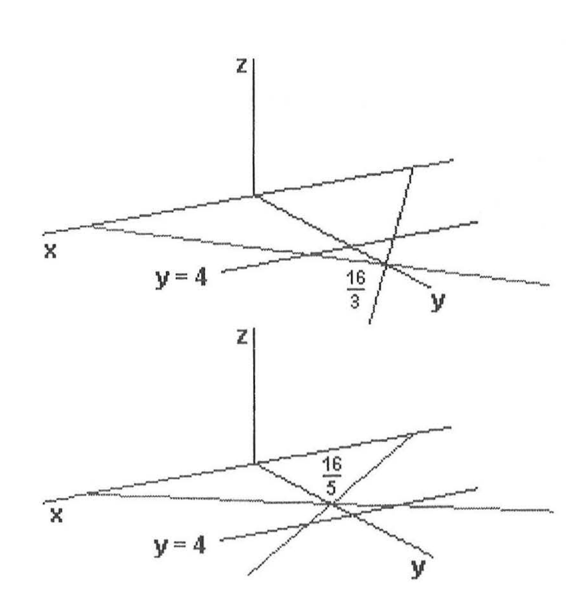
con $\lambda = 4\,\mu$, la dirección de las generatrices será $\{3\,\mu, -4, 0\}$ y haciendo $\mu = u$ obtenemos la superficie parametrizada:

$(4\,u, 0, 2 - 2\,u^2) + w\,\{3\,u, -4, 0\} = ((4+3\,w)\,u, -4\,w, 2 - 2\,u^2)$
$(u, 4, 2 - 2\,u^2) + v\,\{3\,u, -4, 0\} = ((1+3\,v)\,u, 4\,(1 - v), 2 - 2\,u^2)$

con $\lambda = -4\,\mu$, la dirección de las generatrices será $\{-5\,\mu, -4, 0\}$ y haciendo $\mu = u$ obtenemos la superficie parametrizada:

$(-4\,u, 0, 2 - 2\,u^2) + w\,\{-5\,u, -4, 0\} = (-(4+5\,w)\,u, -4\,w, 2 - 2\,u^2)$
$(u, 4, 2 - 2\,u^2) + v\,\{-5\,u, -4, 0\} = ((1 - 5\,v)\,u, 4\,(1 - v), 2 - 2\,u^2)$





[Consideremos las representaciones con parámetros **u,v** de estas dos superficies: $(u + 3\,u\,v, 4 - 4\,v, 2 - 2\,u^2)$ y $(u - 5\,u\,v, 4 - 4\,v, 2 - 2\,u^2)$. De la intersección de ambas con el plano $z = 0$ obtenemos la condición $u = \pm 1$.

En la primera superficie estos valores nos determinan las dos rectas $(1 + 3\,v, 4 - 4\,v, 0)$ y $(-1 - 3\,v, 4 - 4\,v, 0)$; ambas cortan al eje **OY** en $v = -\frac{1}{3}$, que con $u = \pm 1$ determinan el punto $(0, \frac{16}{3}, 0)$ y la superficie contendrá a la recta $x = 0$, $y = \frac{16}{3}$ ($v = -\frac{1}{3}$ en la superficie).

En la segunda superficie, los valores $u = \pm 1$ determinan las rectas $(1 - 5\,u, 4 - 4\,v, 0)$ y $(-1 + 5\,v, 4 - 4\,v, 0)$ que cortan al eje **OY** en $v = \frac{1}{5}$ que con $u = \pm 1$ determinan el punto $(0, \frac{16}{5}, 0)$ y la superficie contendrá la recta $x = 0$, $y = \frac{16}{5}$ ($v = \frac{1}{5}$ en la superficie).

Por lo tanto, ambas superficies podrían haber side generadas como axoides, por rectas que se apoyan en las dos parábolas directrices y en la correspondiente recta vertical. Así se hace en E40 con la segunda de las superficies.]

E38

Superficie generada por rectas paralelas al plano **XOZ** que se apoyan en las curvas:

$y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $z \geq 0$; $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$

Las dos circunferencias directrices del conoide se pueden escribir

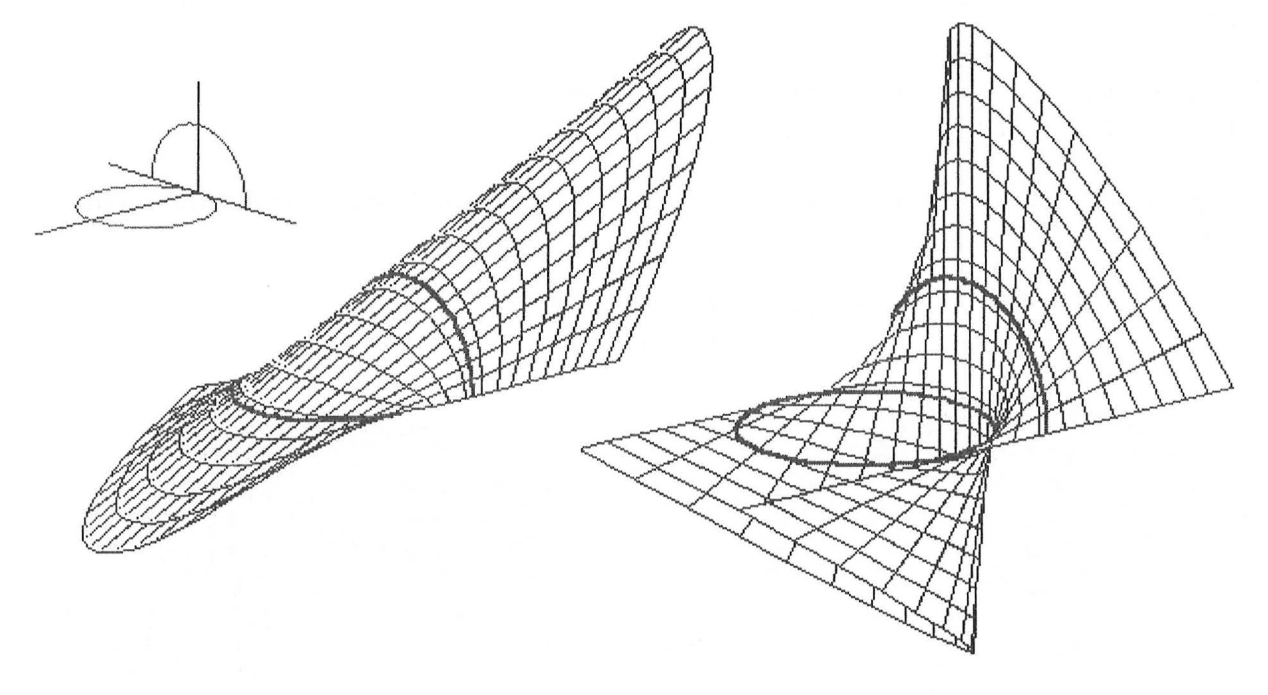
$(0, \cos\lambda, \operatorname{sen}\lambda)$, con $\lambda \in [0, \pi]$, y $(1+\cos\mu, \operatorname{sen}\mu, 0)$

las generatrices tendrán la dirección $\{1+\cos\mu, \operatorname{sen}\mu - \cos\lambda, -\operatorname{sen}\lambda\}$, que deberá ser normal al vector $\{0, 1, 0\}$ por lo que $\operatorname{sen}\mu = \cos\lambda$, y de aquí $\cos\mu = \pm\operatorname{sen}\lambda$. La superficie dispone por tanto de dos "hojas", o si se quiere, diremos que se pueden generar dos conoides distintos con las direcciones $\{1 \pm \operatorname{sen}\lambda, 0, -\operatorname{sen}\lambda\} \equiv \{1+\cos\mu, 0, \pm\cos\mu\}$.

Ambas superficies podrán representarse por cualquiera de las parametrizaciones:

$(0, \cos\lambda, \operatorname{sen}\lambda) + v\,\{1 \pm \operatorname{sen}\lambda, 0, -\operatorname{sen}\lambda\} = (v\,(1 \pm \operatorname{sen}\lambda), \cos\lambda, (1-v)\operatorname{sen}\lambda)$

$(1+\cos\mu, \operatorname{sen}\mu, 0) + v\,\{1+\cos\mu, 0, \pm\cos\mu\} = ((1+v)(1+\cos\mu), \operatorname{sen}\mu, \pm v\cos\mu\}$



E39

Superficie generada por rectas que se apoyan simultáneamente en las líneas:

$y = 0$, $z = 3x^2$; $y = \frac{3}{2}$, $z = 0$; $y = 2$, $z = -x^2$

[En E34 se genera esta misma superficie como un conoide de generatrices horizontales. Una do las dos parábolas directrices de E34 es tomada aquí también como directriz]

Las directrices pueden escribirse $(\lambda, 0, 3\lambda^2)$, $(\mu, \frac{3}{2}, 0)$, $(\theta, 2, -\theta^2)$,

así que la dirección de las generatrices deberán cumplir:

$$\{\lambda-\mu, -\frac{3}{2}, 3\lambda^2\} \equiv \{\lambda-\theta, -2, 3\lambda^2+\theta^2\} \equiv \{\mu-\theta, -\frac{1}{2}, \theta^2\}.$$

De las dos primeras se deduce que ha de satisfacerse

$$\frac{-\frac{3}{2}}{-2} = \frac{3\lambda^2}{3\lambda^2+\theta^2}, \text{ por lo que } \lambda = \pm\theta$$

Con la relación de parámetros $\lambda = \theta \rightarrow \mu = \theta$ (de la segunda y tercera), se determina una superficie ya que las generatrices resultan tener una dirección equivalente en cualquiera de sus tres formas iniciales.
Con $\lambda = \theta = \mu = \mathbf{u}$ la dirección de las generatrices se escribirá:

$\{ \mathbf{0, -1, 2\,u^2} \}$

por lo que resultan ser rectas paralelas al plano **YOZ.**

La superficie puede ahora ser representada indistintamente por las parametrizaciones:

$$(\lambda = \mathbf{u, 0, 3}\,\lambda^2 = \mathbf{3\,u^2}) + \mathbf{v}\,\{ \mathbf{0, -1, 2\,u^2} \} = (\mathbf{u, -v, (3+2\,v)\;u^2})$$
$$(\mu = \mathbf{u}, \frac{3}{2}, \mathbf{0}) + \mathbf{w}\,\{ \mathbf{0, -1, 2\,u^2} \} = (\mathbf{u}, \frac{3}{2} - \mathbf{w}, \mathbf{2\,w\;u^2})$$
$$(\theta = \mathbf{u, 2}, -\theta^2 = -\mathbf{u^2}) + \varpi\,\{ \mathbf{0, -1, 2\,u^2} \} = (\mathbf{u, 2} - \varpi, (\mathbf{2}\,\varpi - \mathbf{1})\,\mathbf{u^2})$$

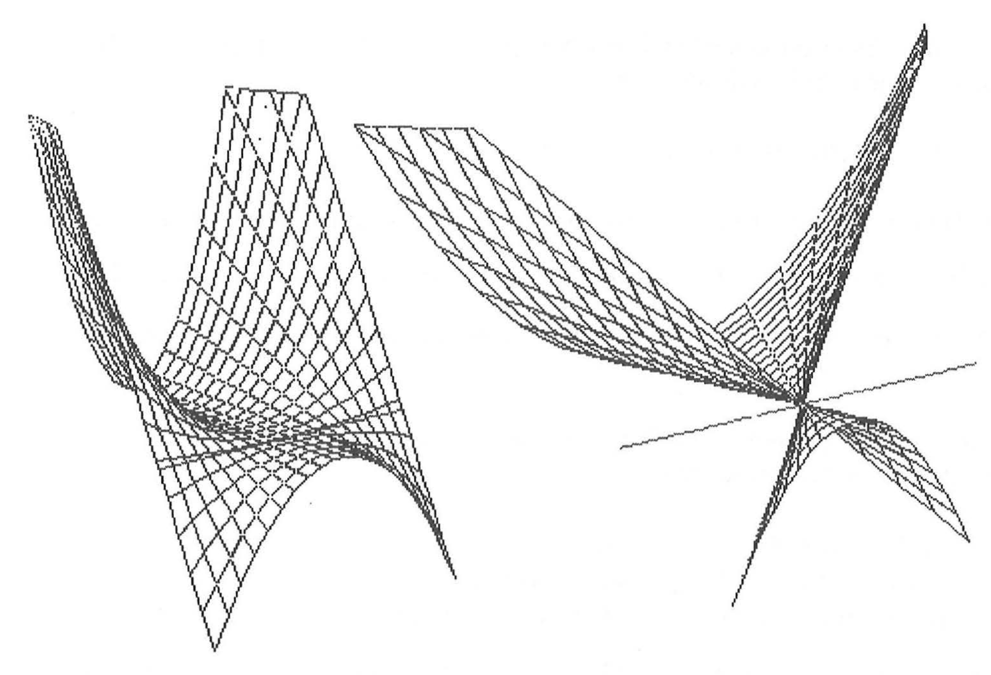
Para $\lambda = -\theta$ encontramos otra solución posible que resultará ser,finalmente, una solución trivial. De las dos primeras expresiones que describen la dirección de las generatrices podemos tomar

$$\frac{\lambda - \mu}{\lambda - \theta} = \frac{3}{4}$$

y con $\lambda = -\theta$ se deduce ahora que $\theta = 2\,\mu$. Con estas relaciones, las tres expresiones de la dirección inicial resultan también equivalentes; haciendo $\mu = \mathbf{u} \rightarrow \theta = \mathbf{2\,u}$, $\lambda = \mathbf{-2\,u}$, resulta ser $\{ \mathbf{2\,u, 1, -8\,u^2} \}$ y la superficie puede ser parametrizada en cualquiera de sus formas:

$$(\lambda = -\mathbf{2\,u, 0, 3}\,\lambda^2 = \mathbf{12\,u^2}) + \mathbf{v}\,\{ \mathbf{2\,u, 1, -8\,u^2} \} = (\mathbf{2\,u\,(v-1), v, (12 - 8\,v)\,u^2})$$
$$(\mu = \mathbf{u}, \frac{3}{2}, \mathbf{0}) + \mathbf{w}\,\{ \mathbf{2\,u, 1, -8\,u^2} \} = (\mathbf{(1+2\,v)\;u}, \frac{3}{2} + \mathbf{w}, -\mathbf{8\,w\,u^2})$$
$$(\theta = \mathbf{2\,u, 2}, -\theta^2 = -\mathbf{4\,u^2}) + \varpi\,\{ \mathbf{2\,u, 1, -8\,u^2} \} = (\mathbf{2\,u\,(1+}\varpi), \mathbf{2} + \varpi, -(\mathbf{4+8}\,\varpi)\,\mathbf{u^2})$$

Esta superficie es un cono con vértice en $(\mathbf{0}, \frac{3}{2}, \mathbf{0})$ lo que puede ponerse de manifiesto calculando, en cualquiera de las parametrizaciones anteriores, su línea de estricción (denominada arista de retroceso por ser una superficie desarrollable) y comprobar que se reduce a un punto que es el vértice del cono, único punto singular de la superficie.



E40
Superficie generada por rectas que se apoyan simultáneamente en las líneas:

$y=0$, $z=2-\frac{1}{8}x^2$; $x=0$, $y=\frac{16}{5}$; $y=4$, $z=2-2x^2$

[Corresponde a la superficie de E37 generada aquí como un axoide]

Las directrices se pueden representar por:

$(\lambda, 0, 2-\frac{1}{8}\lambda^2)$, $(0, \frac{16}{5}, \mu)$, $(\theta, 4, 2-2\theta^2)$,

y las direcciones de las generatrices deberán poder escribirse:.

$$\{\lambda, -\frac{16}{5}, 2-\frac{1}{8}\lambda^2-\mu\} \equiv \{\lambda-\theta, -4, -\frac{1}{8}\lambda^2+2\theta^2\} \equiv \{\theta, \frac{4}{5}, 2-2\theta^2-\mu\}$$

de las dos primeras, se debe verificar:

$$\frac{\lambda}{\lambda-\theta}=\frac{-\frac{16}{5}}{-4} \quad \Rightarrow \quad \lambda=-4\theta$$

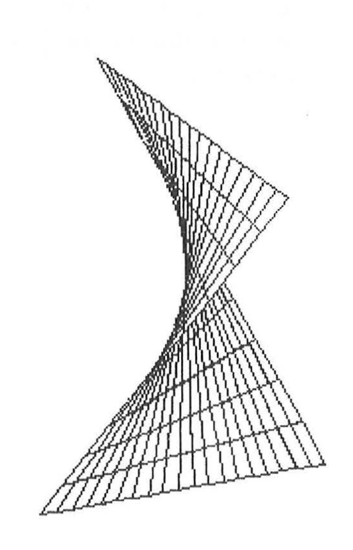
y esta solución implica que la tercera componente se anule (en la segunda de las equivalencias) por lo que $\mu=2-2\theta^2$

Con $\theta=\mathbf{u} \rightarrow \lambda=-4\mathbf{u}$, $\mu=2-2\mathbf{u}^2$, podemos escribir esta dirección en la forma $\{5\mathbf{u}, 4, 0\}$, asi que la superficie podrá expresarse en cualquier de sus parametrizaciones:

$$(\lambda=-4u, 0, 2-\frac{1}{8}\lambda^2=2-\frac{1}{8}u^2)+v\{5u, 4, 0\}=((5v-4)u, 4v, 2-\frac{1}{8}u^2)$$
$$(0, \frac{16}{5}, \mu=2-2u^2)+w\{5u, 4, 0\}=(5u\ w, \frac{16}{5}+4w, 2-2u^2)$$
$$(\theta=u, 4, 2-2\theta^2=2-2u^2)+\varpi\{5u, 4, 0\}=((1+5\varpi)u, 4(1+\varpi), 2-2u^2)$$

E41
Superficie generada por rectas que se apoyan en el eje **OZ** y en las líneas:

$x=1$, $y-z=0$; $x=-1$, $y+z=0$.



Las directrices pueden escribirse $(0, 0, \mu)$, $(1, \lambda, \lambda)$, $(-1, \theta, -\theta)$ y la dirección de las generatrices deberán ser:

$$\{1, \lambda, \lambda-\mu\} \equiv \{-1, \theta, -\theta-\mu\} \equiv \{2, \lambda-\theta, \lambda+\theta\}.$$

Tomando la primera proporción entre las dos primeras direcciones,se deberá verificar $\frac{1}{-1}=\frac{\lambda}{\theta}$, de donde obtenemos la relacion $\lambda=-\theta$, lo que hace que la tercera dirección equivalente tenga nula su tercera componente. Las relaciones $\lambda=\mu=-\theta$ verifican, en efecto, la proporción de las tres.

Con $\lambda=\mu=-\theta=\mathbf{u}$ podremos escribir la dirección en la forma $\{1, \mathbf{u}, 0\}$, y la superficie puede representarse por:

$$(0, 0, \mu=u)+v\{1, u, 0\}=(v, u\ v, u)$$
$$(1, \lambda=u, \lambda=u)+w\{1, u, 0\}=(1+w, (1+w)u, u)$$
$$(-1, \theta=-u, -\theta=u)+\varpi\{1, u, 0\}=(\varpi-1, (\varpi-1)u, u)$$

[Como ya se habrá advertido, la superficie resultante es un paraboloide hiperbólico. Aquí se genera como un conjunto de rectas que se apoyan en otras tres. La disposición hace que las rectas resulten ser horizontales por lo que la superficie resulta ser también un conoide recto conservando como directriz por lo menos el eje **OZ**. Salvo su posición, esta "hoja alabeada" es la misma que en E19.]

E42

Superficie generada por rectas que se apoyan en el eje **OZ** y en las parábolas:

$y = 1 \ , \ z = x^2 \quad ; \quad y = 2 \ , \ z = -x^2$

Las directrices pueden parametrizarse en la forma

$(0, 0, \theta), \ (\lambda, 1, \lambda^2), \ (\mu, 2, -\mu^2),$

y la dirección de las generatrices deberá ser:

$\{\lambda, 1, \lambda^2 - \theta\} \equiv \{\mu, 2, -\mu^2 - \theta\} \equiv \{\mu - \lambda, 1, -\mu^2 - \lambda^2\}$

Tomando de las dos primeras la relación $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{2}{1}$ se obtiene $\mu = 2\lambda$

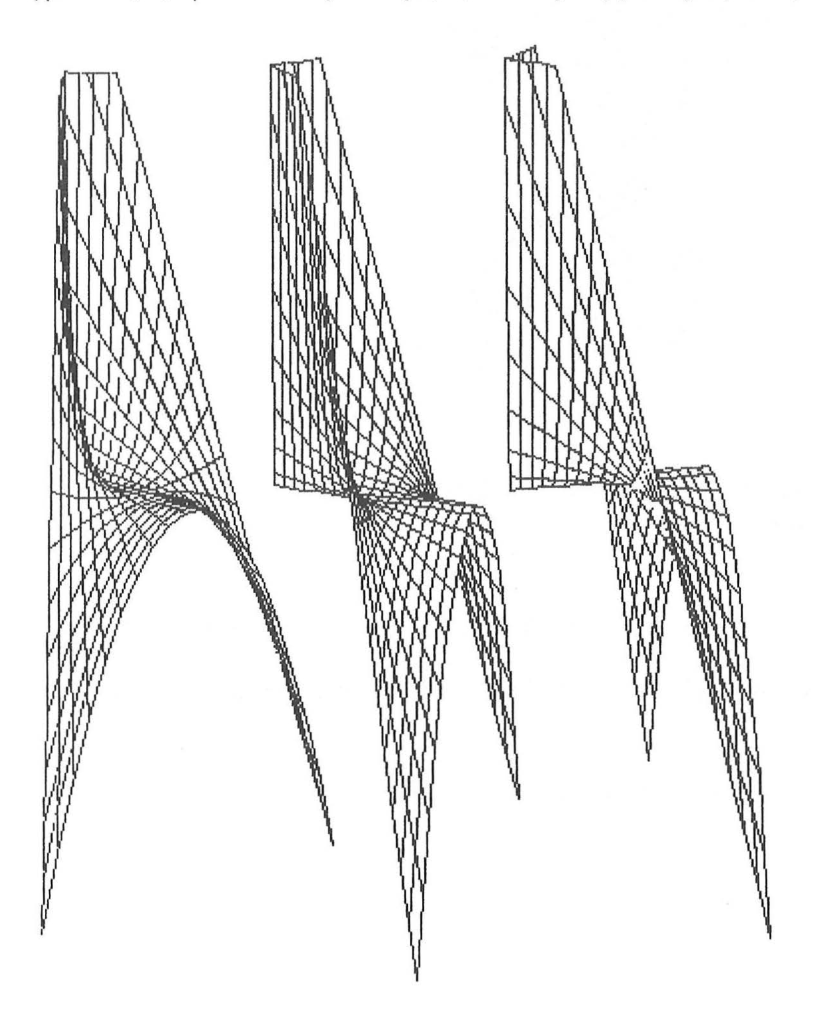
y con $\frac{-\mu^2 - \theta}{\lambda^2 - \theta} = \frac{2}{1}$ se obtiene, además, la relación $\theta = 6\lambda^2$

por lo que haciendo $\lambda = u \rightarrow \mu = 2u$, $\theta = 6u^2$, la dirección de las generatrices podrá escribirse:

$\{u, 1, -5u^2\}$

y la superficie representarse por cualquiera de las parametrizaciones equivalentes:

$(0, 0, \theta = 6u^2) + w\{u, 1, -5u^2\} = (uw, w, (6 - 5w)u^2\}$
$(\lambda = u, 1, \lambda^2 = u^2) + v\{u, 1, -5u^2\} = ((1+v)u, 1+v, (1-5v)u^2)$
$(\mu = 2u, 2, -\mu^2 = -4u^2) + \varpi\{u, 1, -5u^2\} = ((2+\varpi)u, 2+\varpi, -(4+5\varpi)u^2\}$



E43

Superficie generada por rectas que cortan a la circunferencia $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$, $\mathbf{z = 0}$ y se apoyan en las rectas:
$\mathbf{z = 2}$, $\mathbf{y = 0}$; $\mathbf{z = -2}$, $\mathbf{x = 0}$

Las tres directrices pueden escribirse:

$(2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, 0),\ (\lambda, 0, 2),\ (0, \mu, -2),$

así que las generatrices deberán ser:

$\{ 2 \cos \theta - \lambda, 2 \operatorname{sen} \theta, -2 \} \equiv \{ 2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta - \mu, 2 \} \equiv \{ \lambda, -\mu, 4 \}$

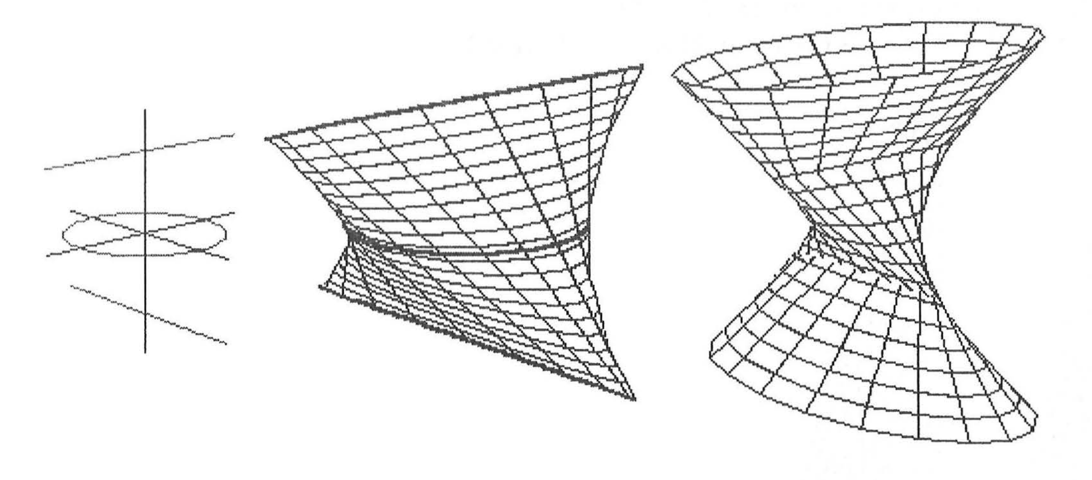
tomando la proporción $\dfrac{2\cos\theta - \lambda}{2\cos\theta} = \dfrac{-2}{2}$ se obtiene $\lambda = 4 \cos \theta$

y con $\dfrac{2 \operatorname{sen} \theta}{-\mu} = \dfrac{-2}{4}$ se obtiene, además, $\mu = 4 \operatorname{sen} \theta$,

lo que en efecto permite obtener la dirección común equivalente $\{ \cos \theta, -\operatorname{sen} \theta, 1 \}$.

Haciendo ahora $\theta = \mathbf{u}$, la superficie puede representarse por cualquiera de las parametrizaciones:

$(2 \cos u, 2 \operatorname{sen} u, 0) + v \{ \cos u, -\operatorname{sen} u, 1 \} = ((2+v) \cos u, (2-v) \operatorname{sen} u, v)$
$(\lambda = 4 \cos u, 0, 2) + w \{ \cos u, -\operatorname{sen} u, 1 \} = ((4+w) \cos u, -w \operatorname{sen} u, 2+w)$
$(0, \mu = 4 \operatorname{sen} u, -2) + \varpi \{ \cos u, -\operatorname{sen} u, 1 \} = (\varpi \cos u, (4-\varpi) \operatorname{sen} u, -2+\varpi)$



E44

Superficie generada por rectas que se apoyan en la recta $\mathbf{y = 3}$, $\mathbf{z = 0}$ y en las curvas:
$\mathbf{9 x^2 + z^2 - 9 = 0}$, $\mathbf{y = 0}$; $\mathbf{x^2 + z^2 = 1}$, $\mathbf{y = 2}$

Una de las generatrices es la elipse $x^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$ en el plano $\mathbf{y = 0}$, que puede parametrizarse en la forma $(\cos \theta, 0, 3 \operatorname{sen} \theta)$, las otras dos pueden escribirse $(\cos \lambda, 2, \operatorname{sen} \lambda)$ y $(\mu, 3, 0)$, así que la dirección de las generatrices deberá poder representarse por:

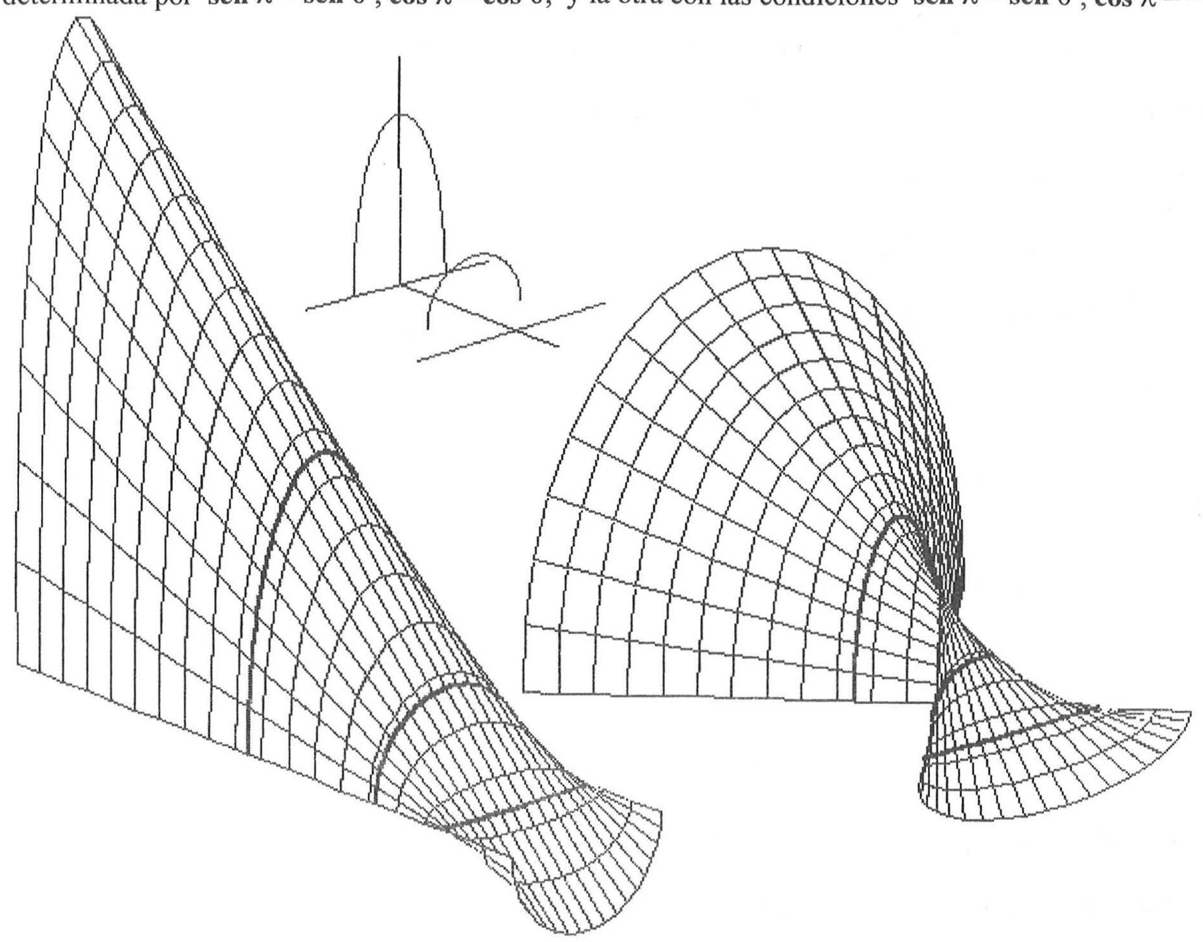
$\{ \cos \lambda - \cos \theta, 2, \operatorname{sen} \lambda - 3 \operatorname{sen} \theta \} \equiv \{ \mu - \cos \theta, 3, -3 \operatorname{sen} \theta \} \equiv \{ \mu - \cos \lambda, 1, -\operatorname{sen} \lambda \},$

de la primera y la tercera obtenemos la proporción:

$\dfrac{2}{1} = \dfrac{\operatorname{sen} \lambda - 3 \operatorname{sen} \theta}{-\operatorname{sen} \lambda},$

y de aquí $\operatorname{sen} \lambda = \operatorname{sen} \theta$,

ecuación que nos proporciona dos superficies diferentes que pueden ser generadas en estas condiciones; una vendrá determinada por **sen λ = sen θ , cos λ = cos θ,** y la otra con las condiciones **sen λ = sen θ , cos λ = – cos θ**.



Con **sen λ = sen θ , cos λ = cos θ** la primera componente de la dirección se anula y **μ = cos θ**; obtenemos así la dirección **{ 0, 1, – sen θ }**, y con ella, la primera de las superficies que puede representarse, con θ = **u**, por cualquiera de las parametrizaciones:

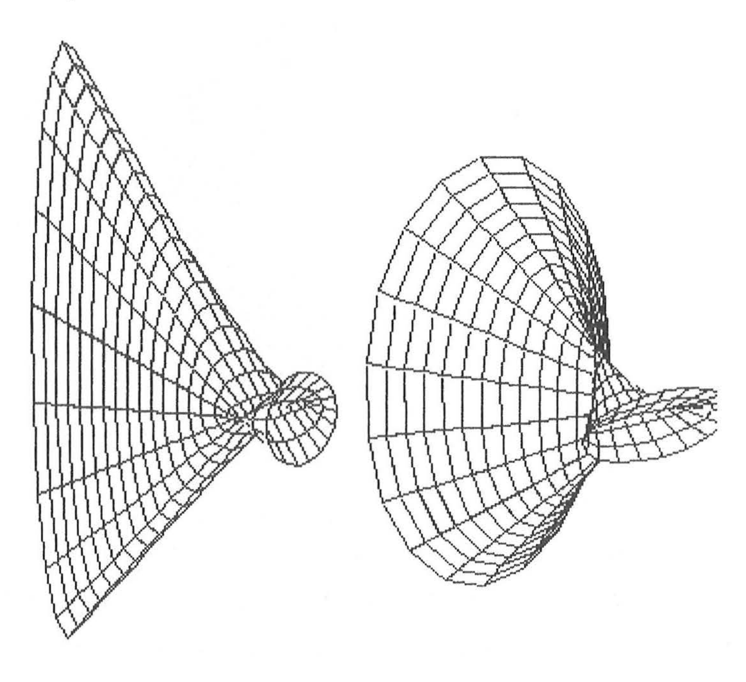
(cos u, 0, 3 sen u) + v { 0, 1, – sen u } = (cos u, v, (3 – v) sen u)
(cos λ= cos u, 2, sen λ= sen u) + w { 0, 1, – sen u } = (cos u, 2+w, (1–w) sen u)
(μ= cos u, 3, 0) + ϖ { 0, 1, – sen u } = (cos u, 3+ϖ, – ϖ sen u)

Con las condiciones **sen λ = sen θ , cos λ = – cos θ**, la proporción $\frac{2}{1} = \frac{\cos\lambda - \cos\theta}{\mu - \cos\lambda}$ nos permite obtener **μ = – 2 cos θ**, y la dirección equivalente:

{ cos θ, –1, sen θ },

con la que determinamos la segunda de las superficies que podrá representarse, con θ = **u**, por:

(cos u, 0, 3 sen u) + v { cos u, –1, sen u } =
= ((1+v) cos u, – v, (3 + v) sen u)
(cos λ= – cos u, 2, sen λ= sen u) + w { cos u, –1, sen u }=
= ((w–1) cos u, 2 – w, (1 +w) sen u)
(μ= – 2 cos u, 3, 0) + ϖ { cos u, –1, sen u } =
= ((ϖ–2) cos u, 3 – ϖ, ϖ sen u)



E45

Superficies generadas por rectas que se apoyan simultáneamente en las tres rectas:

$x = 0\ ,\ z = 1$; $x = 1\ ,\ y = 0$; $y = 1\ ,\ z = 0$

Las directrices pueden escribirse $(\,0, \theta, 1\,)$, $(\,1, 0, \lambda\,)$, $(\,\mu\,, 1, 0\,)$,

y la dirección de las generatrices deberán ser:

$$\{\,1, -\theta, \lambda - 1\,\} \equiv \{\,\mu - 1, 1, -\lambda\,\} \equiv \{\,\mu, 1-\theta, -1\,\},$$

de las dos primeras obtenemos las relaciones

$$\frac{1}{\mu - 1} = \frac{-\theta}{1} = \frac{\lambda - 1}{-\lambda}$$

de donde $\theta = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$, $\mu = \dfrac{1}{1-\lambda}$

y las tres direcciónes en función de λ se podrán escribir:

$$\{\,1, \frac{1-\lambda}{\lambda}, \lambda - 1\,\} \equiv \{\,\frac{\lambda}{1-\lambda}, 1, -\lambda\,\} \equiv \{\frac{1}{1-\lambda}, \frac{1}{\lambda}, -1\,\}$$

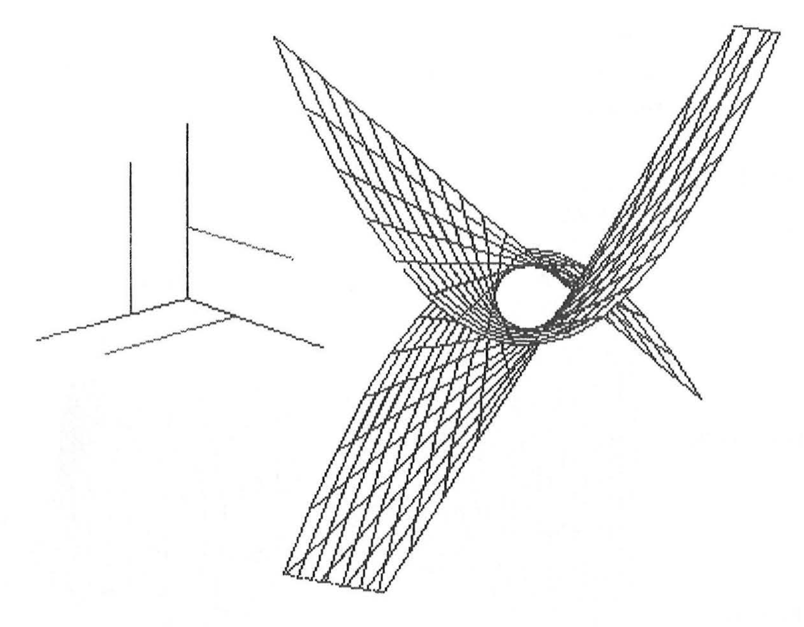
que resultan ser equivalentes a la $\{\,\lambda, 1-\lambda, \lambda^2-\lambda\,\}$, $\lambda \neq 0$.

Con $\lambda = u$, podremos representar, finalmente, la superficie por cualquiera de las parametrizaciones:

$$(\,1, 0, u\,) + v\ \{\,u, 1-u, u^2-u\,\} = (\,1+ u\,v, v\,(1-u), u + v\,(u^2-u)\,)$$

$$(\,0, \theta = \frac{u-1}{u}, 1\,) + w\ \{\,u, 1-u, u^2-u\,\} = (\,u\,w, \frac{u-1}{u} + w\,(1-u), 1 + w\,(u^2-u)\,)$$

$$(\,\mu = \frac{1}{1-u}, 1, 0\,) + \varpi\ \{\,u, 1-u, u^2-u\,\} = (\frac{1}{1-u} + u\,\varpi, 1 + \varpi\,(1-u), \varpi\,(u^2-u)\,)$$



[A causa de su simetría polar, este peculiar conjunto de puntos de $\Re^3$ que satisfacen la ecuación $x\,y + x\,z + y\,z = x + y + z - 1$ puede, dentro de nuestro propio proceso de generación de la superficie, describirse por parametrizaciones muy diversas. Basta escribir la relación entre parámetros en función de "θ" o de "μ". Si escribimos, por ejemplo, esta relación en función de "θ" : $\lambda = \dfrac{1}{1-\theta}$ $\mu = \dfrac{\theta - 1}{\theta}$, encontramos la dirección de las generatrices equivalente a la forma $\{\,1-\theta, \theta^2 - \theta, \theta\,\}$, lo que nos permite escribir las parametrizaciones: $(\,0, \theta, 1\,) + v\ \{\,1-\theta, \theta^2 - \theta, \theta\,\}$; $(\,1, 0, \dfrac{1}{1-\theta}\,) + w\,\{\,1-\theta, \theta^2 - \theta, \theta\,\}$; $(\dfrac{\theta-1}{\theta}, 1, 0\,) + \varpi\,\{\,1-\theta, \theta^2-\theta, \theta\,\}$]

E46

Superficie generada por rectas que se apoyan simultáneamente en el eje **OZ** y en las curvas:

$x^2 + y^2 = 1$, $z = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$ y $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

La hélice circular , la circunferecia y el eje pueden parametrizarse por:

$(\cos\theta, \text{sen}\,\theta, \theta)$; $(2\cos\lambda, 2\,\text{sen}\,\lambda, 0)$; $(0, 0, \mu)$.

Las generatrices que se apoyan simultáneamente en las tres deberán tener como dirección:

$\{2\cos\lambda - \cos\theta, 2\,\text{sen}\,\lambda - \text{sen}\,\theta, -\theta\} \equiv \{2\cos\lambda, 2\,\text{sen}\,\lambda, -\mu\} \equiv \{\cos\theta, \text{sen}\,\theta, \theta - \mu\}$,

y las ecuaciones

$$\frac{2\cos\lambda}{\cos\theta} = \frac{2\text{sen}\,\lambda}{\text{sen}\,\theta} = \frac{-\mu}{\theta - \mu}$$

nos permiten obtener las relaciones:

a) $\cos\lambda = \cos\theta$, $\text{sen}\,\lambda = \text{sen}\,\theta$ $\Rightarrow$ $\mu = 2\theta$

b) $\cos\lambda = -\cos\theta$, $\text{sen}\,\lambda = -\text{sen}\,\theta$ $\Rightarrow$ $\mu = \frac{2}{3}\theta$

Pueden generarse de esta forma, por lo tanto, dos superficies distintas.

La primera de ellas con $\cos\lambda = \cos\theta$, $\text{sen}\,\lambda = \text{sen}\,\theta$, $\mu = 2\theta$, que nos permite escribir la dirección de las generatrices en la forma $\{\cos\theta, \text{sen}\,\theta, -\theta\}$, obteniendo, con $\theta = \mathbf{u}$, las representaciones:

$(\cos u, \text{sen}\,u, u) + v\,\{\cos u, \text{sen}\,u, -u\} = ((1+v)\cos u, (1+v)\,\text{sen}\,u, (1-v)\,u\}$
$(2\cos u, 2\,\text{sen}\,u, 0) + w\,\{\cos u, \text{sen}\,u, -u\} = ((2+w)\cos u, (2+w)\,\text{sen}\,u, -w\,u)$
$(0, 0, 2u) + \varpi\,\{\cos u, \text{sen}\,u, -u\} = (\varpi\cos u, \varpi\,\text{sen}\,u, (2-\varpi)\,u)$

La segunda con $\cos\lambda = -\cos\theta$, $\text{sen}\,\lambda = -\text{sen}\,\theta$, $\mu = \frac{2}{3}\theta$, nos permite escribir la dirección de las generatrices en la forma equivalente $\{\cos\theta, \text{sen}\,\theta, \frac{1}{3}\theta\} \equiv \{3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, \theta\}$,

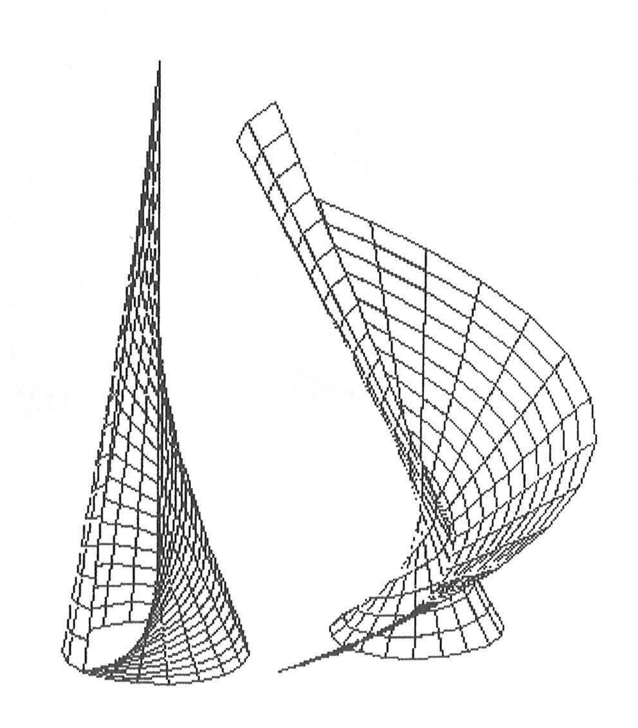
obteniendo, con $\theta = \mathbf{u}$, las representaciones:

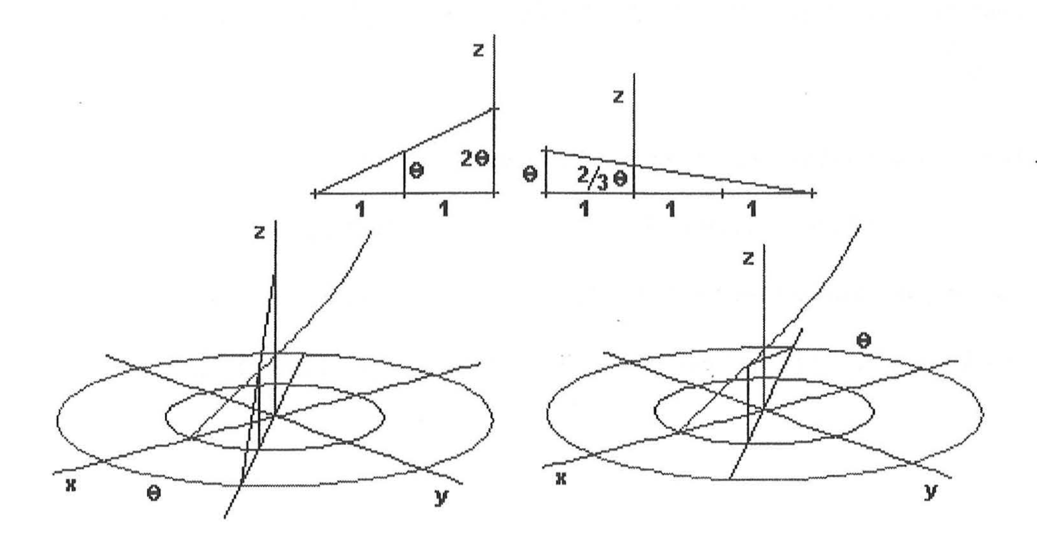
$(\cos u, \text{sen}\,u, u) + v\,\{3\cos u, 3\,\text{sen}\,u, u\} =$
$= ((1+3v)\cos u, (1+3v)\,\text{sen}\,u, (1+v)\,u\}$

$(-2\cos u, -2\,\text{sen}\,u, 0) + w\,\{3\cos u, 3\,\text{sen}\,u, u\} =$
$= ((3w-2)\cos u, (3w-2)\,\text{sen}\,u, w\,u)$

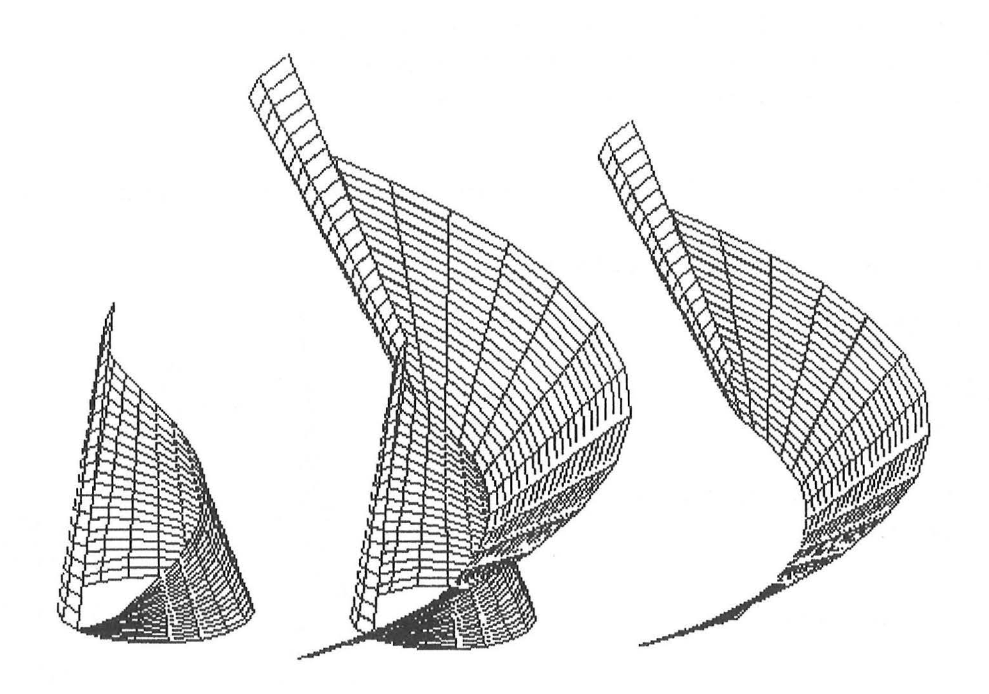
$(0, 0, \frac{2}{3}u) + \varpi\,\{3\cos u, 3\,\text{sen}\,u, u\} =$

$= (3\varpi\cos u, 3\varpi\,\text{sen}\,u, (\frac{2}{3} + \varpi)\,u)$





[El parámetro θ = **u** es el ángulo que barre la proyección de las generatrices sobre el plano **XOY** con el semieje **OX** a ambos lados del origen. Secciones de ambas superficies por planos θ = **cte** nos permiten reconocer la simplicidad constructiva de las dos superficies generadas teniendo en cuenta el triángulo rectángulo que en tales planos determina el eje **OZ**, la generatriz y su proyección sobre **XOY**. Ambas superficies pueden generarse describiendo adecuadamente, con distintos enunciados, un movimiento helicoidal de las rectas generatrices apoyadas en cualquiera de las directrices y en el plano **z =0**.]



E47

Superficie generada por rectas que se apoyan en las dos semicircunferencias:

$\mathbf{x^2+z^2=1}$, $\mathbf{y=0}$, $\mathbf{z\geq 0}$; $\mathbf{(x-1)^2+z^2=1}$, $\mathbf{y=2}$, $\mathbf{z\geq 0}$

y en la recta $\mathbf{x=\frac{1}{2}}$, $\mathbf{z=0}$.

Las directrices pueden parametrizarse en la forma

$(\cos\lambda, 0, \operatorname{sen}\lambda)$, $(1+\cos\theta, 2, \operatorname{sen}\theta)$, $(\frac{1}{2}, \mu, 0)$,

y la dirección de las generatrices deberá ser equivalente a las direcciones:

$$\{1+\cos\theta-\cos\lambda, 2, \operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\lambda\} \equiv \{1+\cos\theta-\frac{1}{2}, 2-\mu, \operatorname{sen}\theta\} \equiv \{\cos\lambda-\frac{1}{2}, -\mu, \operatorname{sen}\lambda\}$$

tomando, por ejemplo, la proporción: $\dfrac{\frac{1}{2}+\cos\theta}{\cos\lambda-\frac{1}{2}}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\lambda}$, se obtiene $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+2\cos\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\lambda-1}$.

Una de las soluciones de esta ecuación es: $\operatorname{sen}\lambda=\dfrac{3\operatorname{sen}\theta}{5+4\cos\theta}$, $\cos\lambda=\dfrac{4+5\cos\theta}{5+4\cos\theta}$

[La relación entre parámetros que determina este axoide pasa por resolver alguna de las ecuaciones trascendentes consecuencia de la condición de proporcionalidad entre las componentes de las direcciones equivalentes de las generatrices. Las soluciones de estas ecuaciones no se obtienen, en modo alguno, de forma inmediata.]

con estos valores y con la proporción $\dfrac{-\mu}{2}=\dfrac{\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\lambda}$ se obtiene, además, $\mu=-\dfrac{3}{1+2\cos\theta}$.

Las relaciones entre parámetros obtenidas nos permiten concluir que las direcciones resultan ser equivalentes a la:

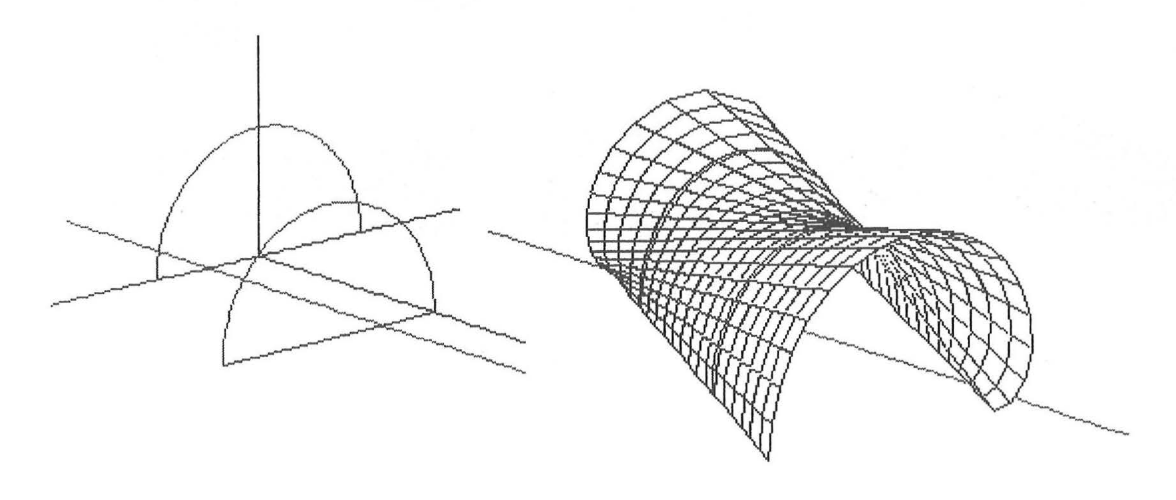
$\{\frac{1}{2}+\cos\theta, \dfrac{5+4\cos\theta}{1+2\cos\theta}, \operatorname{sen}\theta\}$,

con lo que la superficie buscada puede representarse por las parametrizaciones

$$\left(\frac{4+5\cos\theta}{5+4\cos\theta}, 0, \frac{3\operatorname{sen}\theta}{5+4\cos\theta}\right)+v\,\{\frac{1}{2}+\cos\theta, \frac{5+4\cos\theta}{1+2\cos\theta}, \operatorname{sen}\theta\}$$

$$(1+\cos\theta, 2, \operatorname{sen}\theta)+w\,\{\frac{1}{2}+\cos\theta, \frac{5+4\cos\theta}{1+2\cos\theta}, \operatorname{sen}\theta\}$$

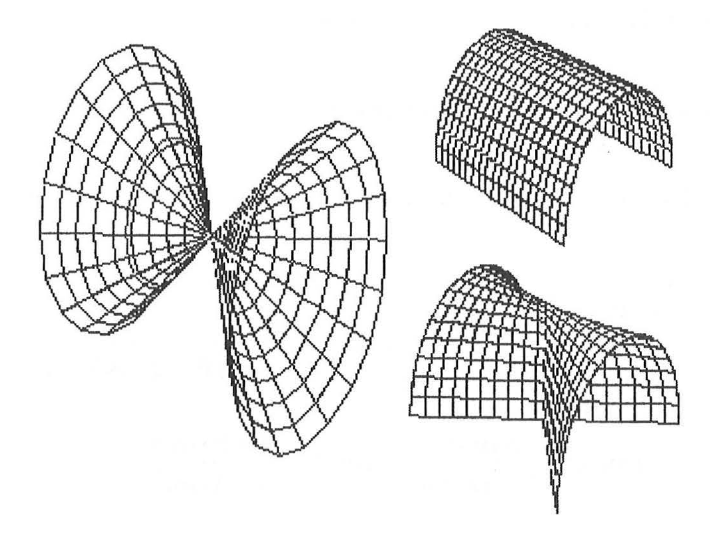
$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{1+2\cos\theta}, 0\right)+\varpi\,\{\frac{1}{2}+\cos\theta, \frac{5+4\cos\theta}{1+2\cos\theta}, \operatorname{sen}\theta\}$$



[No se ha considerado la solución que determina un cono con vértice sobre la recta directriz. Ésta se obtiene para la relación entre parámetros **sen λ = sen θ , cos λ = cos θ , μ = 1**, con lo que la dirección de las generatrices rersulta equivalente al vector

$$\{ 1 - 2 \cos \lambda, 2, -2 \operatorname{sen} \lambda \}.$$

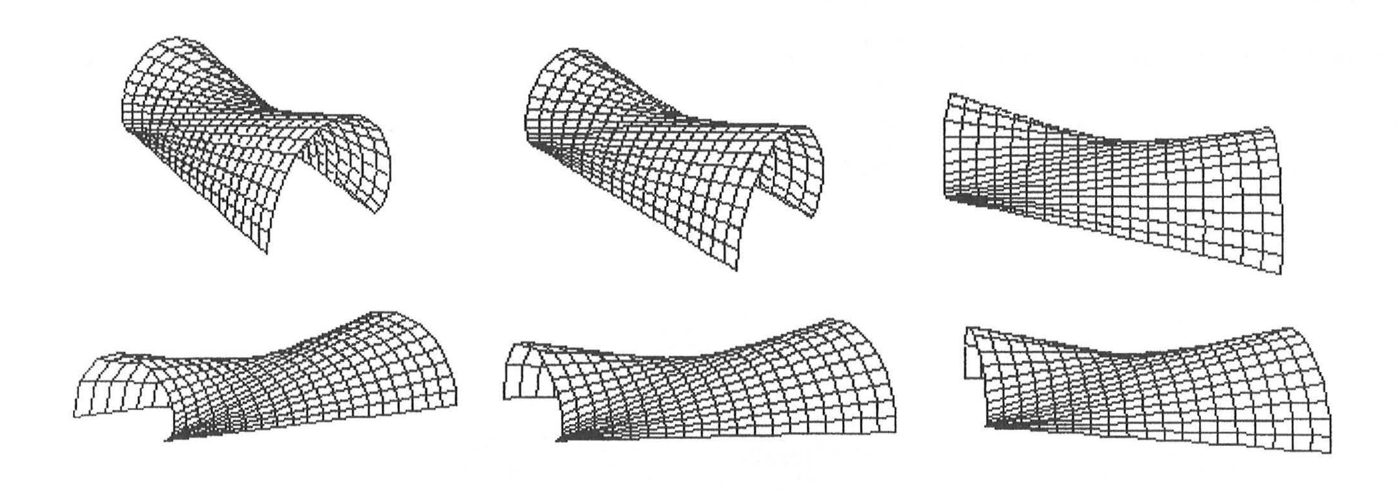
Para obtener una representación paramétrica de este cono bastará tomar el vértice $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ y cualquiera de las dos circunferencias como directriz.



Esta notable superficie resuelve en ingeniería el problema de buscar una bóveda de paso oblicuo que sea una superficie de doble curvatura.Resulta muy interesante poder apreciar su forma constructiva, nada trivial, desde diferentes puntos de vista. Aquí se han realizado las ilustraciones siguientes con la representación paramétrica equivalente:

$$(1+ \cos u, 2, \operatorname{sen} u) + v \{ 1+ \cos u - \frac{4 + 5 \cos u}{5 + 4 \cos u}, 2, \operatorname{sen} u - \frac{3 \operatorname{sen} u}{5 + 4 \cos u} \}.$$

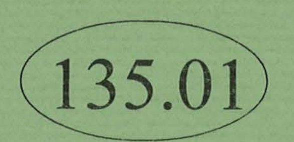
Si tratamos de resolver este paso oblicuo con un cilindroide formado por rectas horizontales que se apoyen en las dos circunferencias directrices obtendremos, por un lado, el cilindro desarrollable y, por otro, un conoide recto – alabeado–, que no puede ser utilizado como paso de bóveda entre las dos directrices porque el eje del conoide queda entre ambas circunferencias. La bóveda alabeada de paso oblicuo entre dos semicircunferencias idénticas en paramentos paralelos puede generalizarse del siguiente modo: es la superficie generada por rectas que se apoyan en ambas semicircunferencias y en la recta perpendicular a los planos que las contienen y que pasa por el punto medio del segmento que une sus centros.]



NOTAS

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
mairea@ctv.es

